

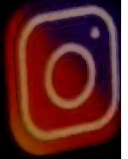
المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

الجزء
الثاني

٢٠٢١



عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب تأكد من وجود
الجلدة المدورة اللاصقة
في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة .



mlazmn



الأستاذ حميد ولد سعيد

07701780364

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

السادس العلمي

المعادلات
التفاضلية

5

التكامل

4

تطبيقات
التفاضل

3

الأحيائي والتطبيقي

2021



مارمور دار المغرب
07702729223



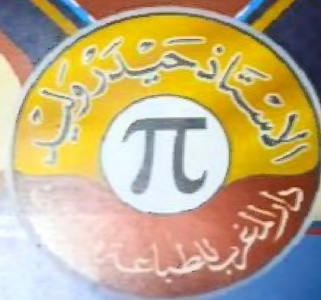
الجزء الثاني

الأستاذ حيدر وليد

07701780364

second
part

2021



السادس العلمي

الأحيائي والتطبيقات



نحذر من استنساخها ولا يجوز ذلك لكونها من أعمالنا الفكرية وحقوقنا
وغير مبررى الذمة والمزمنة موقفة من الكتب والنشر
علما ان ملازمنا حائزة على علامة تجارية من وزارة الثقافة
دائرة التطوير والتنظيم

هام
للغاية

كل نسخة لا تحمل علامة
دار النشر للطباعة
تعتبر مبررة

ملاحظة :- من صفحة 139 الى صفحة 147 (خاص بالتطبيقات)

الحقوق محفوظة

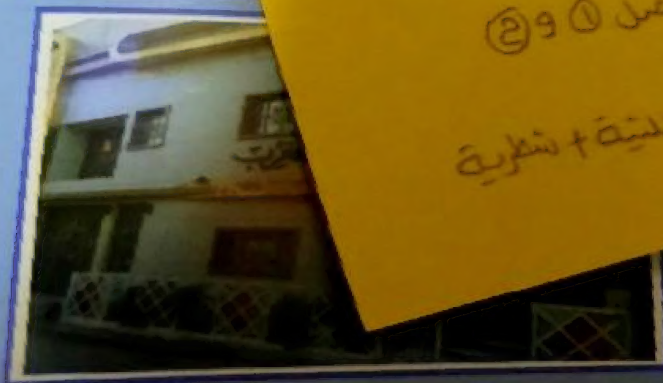
اسم المزمرة : المستند هي الرياضيات
إعداد : الأستاذ حيدر وليد
المطبعة : مطبعة دار المغرب

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها وطبعها **تأكد واحذر ان هناك عقوبات** يحق هذا التجاوز حيث ان كل من زور علامة تجارية مسجلة بصورة قانونية وحاصلة على شهادت تسجيل او قلدها بطريقة يراد منها خداع الجمهور او استعمال بسوء نية علامته التجارية مزورة او مقلدة ان **عقوبة** ذلك موجودة في **القانون العراقي المرقم (٨٠) لسنة (١٩٧٢) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤** وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان الشركة ووسائل التغليف والاوراق وهذا **لذا اقتضى التنويه والتحذير** عقوبات اخرى موجودة في القانون .

١٢١



ملازم
للمغرب



الموضح الى ان ضعيفتيها
١ عمل
مطبخ المعادنة الترسية
بفرد العمل
٢
٣
٤
٥
٦
٧
٨
٩
١٠
١١
١٢
١٣
١٤
١٥
١٦
١٧
١٨
١٩
٢٠
٢١
٢٢
٢٣
٢٤
٢٥
٢٦
٢٧
٢٨
٢٩
٣٠
٣١
٣٢
٣٣
٣٤
٣٥
٣٦
٣٧
٣٨
٣٩
٤٠
٤١
٤٢
٤٣
٤٤
٤٥
٤٦
٤٧
٤٨
٤٩
٥٠
٥١
٥٢
٥٣
٥٤
٥٥
٥٦
٥٧
٥٨
٥٩
٦٠
٦١
٦٢
٦٣
٦٤
٦٥
٦٦
٦٧
٦٨
٦٩
٧٠
٧١
٧٢
٧٣
٧٤
٧٥
٧٦
٧٧
٧٨
٧٩
٨٠
٨١
٨٢
٨٣
٨٤
٨٥
٨٦
٨٧
٨٨
٨٩
٩٠
٩١
٩٢
٩٣
٩٤
٩٥
٩٦
٩٧
٩٨
٩٩
١٠٠

لعرض معرفة نسختك الاصلية من اصدارات ملازمنا زوروا موقعنا على

ملازم دار المغرب

المركز التسويقي الرئيسي
بغداد - السعدون
بغداد - القشبي
07702729223

صفحة ملازم
دار المغرب

mlazmna



منذ ان اخترنا مجال الطباعة والنشر كان دافعنا ورائدنا هو محبتنا وتعلقنا الصميمي بتلك المهنة الشريفة في طباعة ونشر العلوم والآداب والمعارف بشتى صنوفها العلمية والإنسانية، الى جانب طباعة ما يحتاجه الناس في مختلف شؤونهم المهنية واعمالهم الصناعية والتجارية . نحسب أننا قطعنا شوطاً طويلاً ناهز الأربعين عاماً إتسم بتراكم الخبرات والتجارب مع تطور كبير في خدماتنا الطباعية ومنجزنا الفني والمهني ، ولانبالغ القول أن مطبوعاتنا التي لازمت علامتنا دار المغرب كانت ومازالت تقترن بالجودة والإتقان العالي ، ولعل استمرارنا على ذات النهج هو سر نجاحنا الذي لانحيد عنه أبداً ، وإننا إذ ننظر لرصيدنا الفني والتقني وسمعتنا الطيبة بين نظرائنا ، نسعى لتعزيز أدائنا بالإفادة من التطورات في عالم الطباعة والانفتاح على أحدث تقنياتها العالمية من خلال تواصل مطبعتنا (دار المغرب) بالمؤسسات الطباعية المعروفة خارج القطر ومواكبة آخر التطورات في مجال طباعة الكتب ، نستخدم في دارنا أفضل وسائل الطباعة الملونة وتقنيات التذهيب الحراري البارز والغائر والتصوير التجسيمي (ثلاثي الأبعاد-الهولكرام) لإعطاء أهمية في عرض منتجاتنا الطباعية والمساعدة للحد من حالات الاستنساخ الذي يفقد جمالية الكتاب وحفاظاً لحقوق مؤلفيها وضماناً لحقوقنا الطباعية ، قمنا بتسجيل إصداراتنا في الدوائر المختصة مع رقم الإيداع في المكتبة الوطنية ، ومن الناحية التطبيقية عملنا ما ليس باستطاع المقلدين إعادة طباعتها كما هي في الأصل وبالتالي يسهل كشفها وإفشالها ومقاضاتها قانونياً واستخدمنا باج بلاستيكية لاصقاً يحتوي على تصميم بطباعة غائرة عبارة عن علامة تحمل اسم مطبعتنا واسم مؤلفها وهذا الباج يلصق على كل نسخة تصدر من مطبعتنا، فضلاً عن التقنيات المستخدمة في طباعة الغلاف سالقة الذكر، وهما نحن الآن نقدم بين أيديكم ملازمنا الدراسية لمرحلة السادس الإعدادي سعيين أن نبذل قصارى جهودنا في إخراج مطبوع جميل يضيف البهجة والسرور لنفسية الطالب في بنيته الشكلية ومادته العلمية المنسقة والمطبوعة بأوراق ناعمة وبطباعة ملونة أنيقة مريحة للبصر باستخدام الورق الناعم الطافئ (آرت مت) وهو ورق غالي الثمن قياساً بالورق الاعتيادي الذي يسهم في زيادة الدقة والجودة، تعاقدت مطبعتنا مع أساتذة موهبين في مجال تخصصاتهم ولهم خبرة عالية في التدريس، وحين استلامنا المادة العلمية (الملزمة) من الاستاذ مباشرة نقوم بإعادة تنضيدها وتنسيق وتوضيب صفحاتها وفصولها ومراجعتها قبل الطباعة ، وأسسنا مراكز تسويقية في كافة محافظات العراق، لسهولة حصول واقتناء الطالب على ملازمنا، نتمنى لأبنائنا الطلبة التوفيق والنجاح لأنهم عماد المستقبل، وإذا كان لديهم ملاحظات وجيهة فليكتبوا لنا على بريدنا الالكتروني لمناقشتها مع الاساتذة و كادرنا الفني سعيلاً للارتقاء الى الأفضل دائماً ، أما الكمال فאלله وحده، وهو ولي التوفيق.



جمهورية العراق
وزارة الصناعة والمعادن
دائرة التطوير والتنظيم الصناعي
قسم العلامات والبيانات التجارية

شهادة تسجيل علامة
CERTIFICATE OF REGISTRATION

رقم العلامة / ٧٥٩٤٧ صدرت في اليوم () من شهر () سنة ()



دار المغرب

ال : مطبعة المغرب

العنوان : العراق - بغداد - البتاوين

عملاً بأحكام المادة (١٥) من قانون العلامات والبيانات التجارية رقم (٢١) لسنة ١٩٥٧ المعدل فأنتم تشهدون بهذه العلامة التجارية الواردة ذكرها في طلبكم المؤرخ في (٢٠١٨ / ٢ / ١٤) قد أعلن عنها حسب الأصول تحت رقم (٧٥٩٤٧) في العدد (٥٧٧) من منشور العلامات والبيانات التجارية الصادرة في (٢٠١٨ / ٢ / ٢٣) وسجلت باسمكم في الصنف (١٦ - أ ب ج د هـ)

يستمر التسجيل نافذاً لمدة عشر سنوات من تاريخ تقديم طلب التسجيل (٢٠١٨ / ٢ / ١٤) ويجوز التجديد لمدة أخرى أمد كل منها ١٠ سنوات

علاء موسى علي
مسجل العلامات التجارية
١٤١٥



صفحة ملازم
دار المغرب



mlazmna



مطبعة المغرب



مجاز

من قبل

المديرية العامة للتنمية الصناعية / وزارة الصناعة والمعادن
رقم الأجازة ٢٢٠٩٥

كامل التأسيس

يحظر من استنساخها ولا يجوز ذلك لكون فيها اسكال شرعي وقانوني وغير مبرر الذمة والمزرمة موثقة من دار الكتب والوثائق علما ان ملازمنا حاضرة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي

المُسْنَدُ حَيْدَرُ وَلِيد

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



2021

3

تطبيقات التفاضل

الفصل الثالث

الأحيائي و التطبيق

07702729223



دار المغرب

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



ملازم دار المغرب



07702728223

قوانين أساسية

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

قوانين نصف الزاوية

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

قوانين ضعف الزاوية

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

لدينا ستة دوال مثلثة وهي: $(\sin x - \cos x - \tan x - \cot x - \sec x - \csc x)$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (\cos) \quad \text{مقلوب الـ}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \quad (\sin) \quad \text{مقلوب الـ}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad (\tan) \quad \text{مقلوب الـ}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x}$$

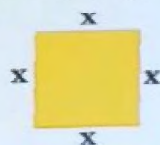
$$\sin x = \frac{1}{\csc x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

قوانين مهمة تفهم وتحفظ

- 1 (الطول . العرض) $A = x^2$ المساحة
مجموع الأضلاع $P = 4x$ المحيط



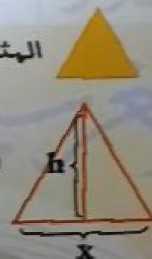
- 2 الطول . العرض = مساحة المستطيل
 $A = x \cdot y$ $P = 2(x + y)$

$A = x \cdot y$ $P = 2(x + y)$

- 3 $A = \frac{1}{2} x \cdot h$ المثلث

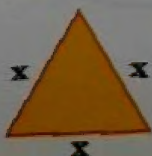
$A = \frac{1}{2} (القاعدة) (الارتفاع)$

$P =$ مجموع أضلاعه الثلاث



المثلث المتساوي الأضلاع

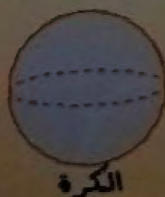
$A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$
 $P = 3x$



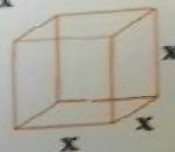
- 4 $A = \pi r^2$ مساحة الدائرة
 $P = 2\pi r$ المحيط



- 5 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ حجم الكرة
 $A = 4\pi r^2$ مساحة الكرة السطحية



- 6 الارتفاع . مساحة القاعدة $V = x \cdot x \cdot x \rightarrow V = x^3$



المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
المساحة الجانبية = محيط القاعدة . الارتفاع

$TA = 4x \cdot x + 2(x^2)$

$TA = 4x^2 + 2x^2$ المساحة الكلية

$TA = 6x^2$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة . الارتفاع

$LA = 4x \cdot x$

$LA = 4x^2$

- 7 المخروط
الارتفاع . مساحة القاعدة $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

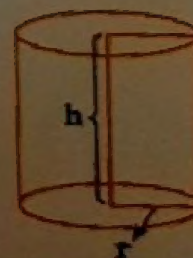
$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$



- الأسطوانة الارتفاع . مساحة القاعدة $V = \pi r^2 \cdot h$

$TA =$ المساحة الجانبية + 2 مساحة قاعدة واحدة
محيط القاعدة . الارتفاع

$TA = 2\pi r \cdot h + 2(\pi r^2)$

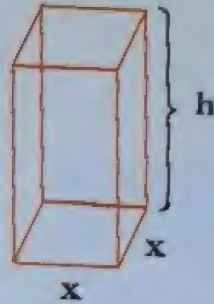


متوازي مُستطيلات

قاعدة مربعة

V = مساحة القاعدة . الارتفاع

$$V = x^2 \cdot h$$



$$T.A = \text{مساحة قاعدة واحدة} + 2 \left(\text{مساحة الجانبيه} \right)$$

الارتفاع

$$T.A = 4x \cdot h + 2(x^2)$$

المساحة الجانبيه

قاعدة مستطيلة



V = الارتفاع . مساحة القاعدة

$$V = xy \cdot h$$

$$T.A = \text{مساحة قاعدة واحدة} + 2 \left(\text{مساحة الجانبيه} \right)$$

الارتفاع

$$T.A = (2x + 2y) \cdot h + 2xy$$

المساحة الجانبيه

حجم الجليد =

حجم الشكل - حجم الشكل مع الجليد

لاى شكل منتظم بالجليد

قبل ان نسلو نشتك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغ القواصل الإجتماعي او ابصاها بالموبايل او اجهزة نقل الم مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سوا وقانوني) ونشر ميراث الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال . علما ان على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شه المرافعي الرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٤ واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق

المشتقة

أولاً، مشتقة الثابت = تساوي صفر

$$f(x) = a \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = -5 \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = 3 \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = -\sqrt{2} \Rightarrow \bar{f}(x) = 0$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow \bar{f}(x) = nx^{n-1} \quad \text{ثانياً، مشتقة } x^n$$

* n عدد صحيح موجب :

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \bar{f}(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \bar{f}(x) = 4x^3$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow \bar{g}(x) = 2x$$

$$h(x) = 3x^3 \Rightarrow \bar{h}(x) = 9x^2$$

$$f(x) = 2x^5 \Rightarrow \bar{f}(x) = 10x^4$$

* n عدد صحيح سالب :، فالأس سينزاد كرقم بمقدار واحد

$$f(x) = x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x) = -3x^{-4}$$

$$f(x) = x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x) = -2x^{-3}$$

$$f(x) = -2x^{-4} \Rightarrow \bar{f}(x) = +8x^{-5}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{5}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

* إذا كانت الأس كسر $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

عند تقليل الأس بمقدار واحد يطبق القانون $\frac{\text{البسط} - \text{المقام}}{\text{المقام}}$

$$f(x) = x \Rightarrow \bar{f}(x) = 1$$

ملاحظة (1) مشتقة x تساوي واحد 1

ملاحظة (1)

$$f(x) = 3x \Rightarrow \bar{f}(x) = 3$$

مشتقة ax تساوي a

ملاحظة (2)

$$f(x) = 7x \Rightarrow \bar{f}(x) = 7$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{2}$$

كل x^n بالبقاء ترفع إلى البسط

ملاحظة (3)

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f(x) = x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x) = -3x^{-4} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-3}{x^4}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x^{-1} \Rightarrow \bar{f}(x) = -1x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2} \Rightarrow f(x) = 3x^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x) = -6x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-6}{x^3}$$

$$\sqrt[n]{(\quad)^1} \Rightarrow (\quad)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{(\quad)^1} \Rightarrow (\quad)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{(\quad)^3} \Rightarrow (\quad)^{\frac{3}{n}}$$

$$\sqrt[n]{(\quad)^7} \Rightarrow (\quad)^{\frac{7}{n}}$$

كيف نتخلص من الجذر

ملاحظة (4)

ثالثاً، مشتقة حاصل جمع أو طرح مجموعة دوال:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow \bar{f}(x) = \bar{g}(x) \pm \bar{h}(x)$$

$$f(x) = x^3 + x^4 \Rightarrow \bar{f}(x) = 3x^2 + 4x^3$$

أمثلة بسيطة (أساسية)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 7 - 0$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{تعديل}} f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3 \quad f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

رابعاً: مشتقة حاصل ضرب دالتين:

المشتقة = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

$$1 \quad f(x) = \underbrace{(x^3 + 5x + 2)}_{\text{الأولى}} \underbrace{(x^3 + 2)}_{\text{الثانية}}$$

$$f'(x) = \underbrace{(x^3 + 5x + 2)}_{\text{الأولى}} \underbrace{(3x^2)}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{(x^3 + 2)}_{\text{الثانية}} \underbrace{(3x^2 + 5)}_{\text{مشتقة الأولى}}$$

$$2 \quad g(x) = (x^2 + 2)(x^3 - x^2 + x + 1)$$

$$g'(x) = (x^2 + 2)(3x^2 - 2x + 1) + (x^3 - x^2 + x + 1)(2x)$$

خامساً: مشتقة حاصل قسمة دالتين (بسط ومقام).

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2} = \text{المشتقة}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{(x^2 + 1)(6x) - (3x^2 + 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{6x^3 + 6x - 6x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

سادساً: القوس البرفوع إلى اس:

$$f(x) = [g(x)]^n \rightarrow \bar{f}(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot \bar{g}(x)$$

الاس

نفس القوس
نطرح من
الاس واحد

مشتقة
داخل القوس

$$f(x) = (x^2 + 2)^3 \rightarrow \bar{f}(x) = 3(x^2 + 2)^2 (2x)$$

$$\bar{f}(x) = 6x(x^2 + 2)^2$$

ملاحظة

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow \bar{f}(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

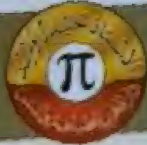
مشتقة الجذر التربيعي:

مشتقة داخل الجذر

$$\frac{\text{المشتقة}}{2 \sqrt{\text{نفس الجذر}}} = \text{المشتقة}$$

(تستعمل اثناء الحل للسرعة) ولا يجوز حل
سؤال المشتقة بهذه الطريقة بل نتخلص من
الجذر ونستخدم قاعدة (6)

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x} \rightarrow \bar{f}(x) = \frac{2x + 5}{2\sqrt{x^2 + 5x}}$$



مشتقات الدوال المثلثية:

- 1 $y = \sin x \Rightarrow \bar{y} = \cos x$. مشتقة الزاوية
- 2 $y = \cos x \Rightarrow \bar{y} = -\sin x$. مشتقة الزاوية
- 3 $y = \tan x \Rightarrow \bar{y} = \sec^2 x$. مشتقة الزاوية
- 4 $y = \cot x \Rightarrow \bar{y} = -\csc^2 x$. مشتقة الزاوية
- 5 $y = \sec x \Rightarrow \bar{y} = \sec x \cdot \tan x$. مشتقة الزاوية
- 6 $y = \csc x \Rightarrow \bar{y} = -\csc x \cdot \cot x$. مشتقة الزاوية

ملاحظة

... الخ تعتبر قوس مرفوع إلى أس $\tan^2 x = \cos^2 x = \sin^2 x$

الاشتقاق الضمني

عند اشتقاق علاقة ضمنية فكل y يتم اشتقاقها بضرب \bar{y} كما في المثال التوضيحي التالي:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x + 2y\bar{y} = 0 \Rightarrow 2y\bar{y} = -2x \Rightarrow \bar{y} = -\frac{x}{y}$$

تنويه

الاشتقاق الضمني سوف يتم التركيز عليه في الفصل الخامس بشكل مفصل Δ في الفصل الثالث فلا نحتاجه سوى في مثال واحد أو مثالين

مثال 1 إذا علمت أن $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن على أن: $y \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$$2y \frac{dy}{dx} + 2x = 0 \quad \div 2 \rightarrow y \frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 = 0$$

$$y \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 0 = 0$$

$$y \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

قد مضت بين جماله وجلاله
وغدا لسان الحال عني مخبراً
فأحذر لحاظك فني محاسن وجهه
تلقه جميع النعم فيه مصوراً

مثال 2 إذا كانت $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

$$\frac{dy}{dx} = -(2) \sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(2)(2) \cos 2x \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -4 \cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4(-2) \sin 2x \rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 8 \sin 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 8(2) \cos 2x \rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = 16 \cos 2x$$

تمارين (3-1)

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل ما يأتي:

سؤال 1

a $y = \sqrt{2-x}$, $\forall x < 2$

$$y = (2-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)$$

$$\bar{y} = \frac{-1}{2(2-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\bar{y} = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$\bar{y} = \frac{-1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{+1}{4}(2-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$

$$= \frac{-1}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{(2-x)^3}}$$

$$\bar{f}(x) = \bar{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$\bar{f}(x) = \bar{y} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ملاحظة

b $y = \frac{2-x}{2+x}, \quad x \neq 2$

$$\bar{y} = \frac{(2+x) \cdot (-1) - (2-x) (1)}{(2+x)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{-2 - \cancel{x} - 2 + \cancel{x}}{(2+x)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{-4}{(2+x)^2}$$

مشتقة أولى

$$\bar{y} = -4 (2+x)^{-2} \quad (\text{تعديل})$$

$$\bar{y} = +8 (2+x)^{-3} \quad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{8}{(2+x)^3}$$

بتحل بطريقتين!
- نرفع القوس
للجس و يصبح الاس
سالبا
- طريق البسط والمقام

* ان وجدت x في البسط لا نرفع القوس
لانه سيصبح حاصل ضرب دالتين فالأولى
الحل بالقسمة

c $2x \cdot y - 4y + 5 = 0$

$$2(x \cdot (1) \bar{y} + y(1)) - 4 \bar{y} + 0 = 0$$

$$[2x \bar{y} + 2y - 4 \bar{y} = 0] + 2 \Rightarrow x \bar{y} + y - 2 \bar{y} = 0$$

$$x \bar{y} - 2 \bar{y} = -y \quad \text{نسحب } \bar{y} \text{ عامل مشترك}$$

$$\bar{y} (x-2) = -y$$

$$\bar{y} = \frac{-y}{x-2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{(x-2)(-\bar{y}) - (-y)(1)}{(x-2)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{-\bar{y}(x-2) + y}{(x-2)^2} = \frac{-\left(\frac{-y}{x-2}\right) \cdot (x-2) + y}{(x-2)^2}$$

$$\bar{y} = \frac{y+y}{(x-2)^2} = \frac{2y}{(x-2)^2}$$

ملاحظة

في الاشتقاق الضمني كل
مشتقة لـ y يتم ضرب
الناتج بـ \bar{y} وهي $\frac{dy}{dx}$

* هناك عدة طرق
لحل هذا السؤال

1 $f(x) = 4\sqrt{6-2x}$

$$f'(x) = 4(6-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 2(6-2x)^{-\frac{3}{2}} \quad (-2)$$

$$f'''(x) = -4(6-2x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x) = 2(6-2x)^{-\frac{7}{2}} \quad (-2)$$

$$f'''(x) = -4(6-2x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x) = 6(6-2x)^{-\frac{7}{2}} \quad (-2) \Rightarrow f'''(x) = \frac{-12}{(6-2x)^{\frac{7}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{-12}{\sqrt{(6-2x)^5}} \Rightarrow f'''(1) = \frac{-12}{\sqrt{(6-2)^5}} = \frac{-12}{\sqrt{(4)^5}} = \frac{-12}{2^5} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$$

2 $f(x) = \sin(\pi x)$

$$f'(x) = \pi \cos(\pi x)$$

$$f''(x) = \pi(-\sin(\pi x)) \cdot \pi$$

$$f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x)$$

$$f'''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x) \cdot \pi$$

$$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$$f'''(1) = -\pi^3 \cdot \cos \pi(1)$$

$$= -\pi^3(-1) = \pi^3$$



3 $f(x) = \frac{3}{(2-x)} , x \neq 2$

$f(x) = 3(2-x)^{-1}$

$f(x) = -3(2-x)^{-2} (-1)$

$f(x) = 3(2-x)^{-2}$

$f(x) = -6(2-x)^{-3} (-1)$

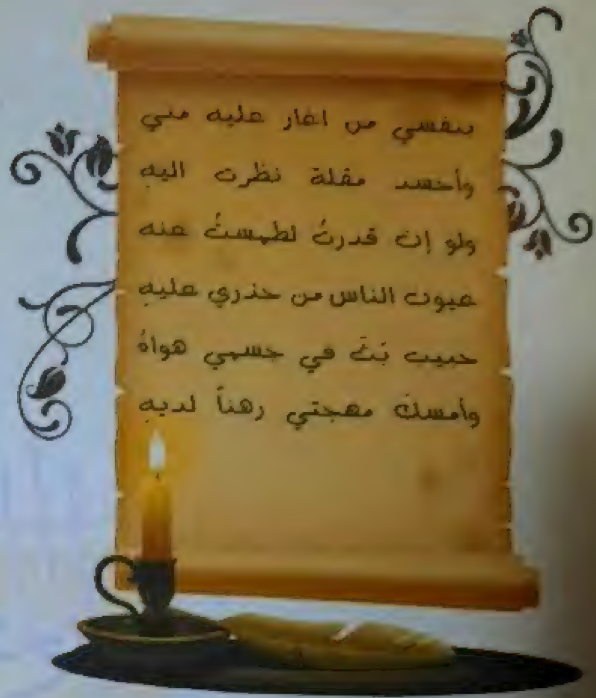
$f(x) = 6(2-x)^{-3}$

$f(x) = -18(2-x)^{-4} (-1)$

$f(x) = 18(2-x)^{-4}$

$f(x) = \frac{18}{(2-x)^4}$

$f(1) = \frac{18}{1} = 18$



سؤال 3 إذا كانت $y = \tan x$ برهن ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$

$y = \tan x$

$y = \sec^2 x \Rightarrow \bar{y} = (\sec x)^2$ قوس مرفوع لأس

$y = 2(\sec x) \cdot \sec x \tan x$

$y = 2 \sec^2 x \cdot \tan x$

$\bar{y} = \frac{d^2y}{dx^2}$



فكر

إذا كانت $y = \sec x$ برهن انه:

$y(2y^2 - 1) = \bar{y}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$ (العلاقة هذه معطى بالسؤال)

$2 \sec^2 x \cdot \tan x = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$

$2 \sec^2 x \cdot \tan x = 2 \tan x \cdot \sec^2 x$

R.H.S = L.H.S

قانون

$\sec^2 x$

سؤال 4: إذا كان $y = x \sin x$ برهن ان $y^{(4)} - y + 4 \cos x = 0$

$$y = x \sin x \Rightarrow \bar{y} = x \cos x + \sin x \quad (1)$$

$$\bar{y} = x(-\sin x) + (\cos x)(1) + \cos x$$

$$\bar{y} = -x \sin x + 2 \cos x$$

$$\bar{y} = -[x \cos x + \sin x(1)] + 2(-\sin x)$$

$$\bar{y} = -x \cos x - \sin x - 2 \sin x$$

$$\bar{y} = -x \cos x - 3 \sin x$$

$$y^{(4)} = -[x(-\sin x) + (\cos x)(1)] - 3 \cos x$$

$$y^{(4)} = x \sin x - \cos x - 3 \cos x$$

$$y^{(4)} = x \sin x - 4 \cos x$$

$$y^{(4)} - y + 4 \cos x = 0 \Rightarrow \text{علاقة السؤال}$$

$$x \sin x - \cancel{4 \cos x} - x \sin x + \cancel{4 \cos x} = 0 \quad \text{التعويض بعلاقة السؤال}$$

$$0 = 0$$

$$R.H.S = L.H.S$$

في اشتقاق المتنها :

- لا نعوض في علاقة
رأيت اننا

- ان نحول علاقة (إذا)
الى علاقة رأيت اننا

واجب

إذا كان $y = \tan x$ برهن ان $2y\bar{y} - \bar{\bar{y}} = 0$

إذا كان $y = \sin 2x$ اثبت ان $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 16$

إذا كان $y^2 = x^2(1-x)$ اثبت ان $y\bar{y} + (\bar{y})^2 + 3x = 1$

إذا كان $x^2 + 2y^2 = 4$ اثبت ان $yy^{(3)} + 3\bar{y}\bar{\bar{y}} = 0$

سؤال 1

سؤال 2

سؤال 3

سؤال 4

المعادلات الزمنية

المتغير	معدل التغير
A = مساحة	$\frac{dA}{dt}$ = معدل التغير في المساحة
V = حجم	$\frac{dV}{dt}$ = معدل التغير في الحجم
r = نصف القطر	$\frac{dr}{dt}$ = معدل التغير في نصف القطر
θ = زاوية	$\frac{d\theta}{dt}$ = معدل التغير في الزاوية
h = الارتفاع	$\frac{dh}{dt}$ = معدل التغير في الارتفاع

ملاحظات

1- كل وحدة قياس تحوي زمن (زمن) فهذا معدل تغير $\frac{d\Box}{dt}$

* إذا كانت وحدة القياس تحوي تكعيب فهذا معدل تغير حجم $\frac{dV}{dt} = 0.5 \text{ cm}^3 / \text{s}$ ←

* إذا كانت وحدة القياس تحوي تربيع فهذا معدل تغير مساحة $\frac{dA}{dt} = 2 \text{ cm}^2 / \text{s}$ ←

تأثير التغير:

1 (يشرب، ينقص، ينخفض، ينوب، يقل، يقلص، ينكمش) معناها الإشارة - سالبة

2 (يصب، يزداد، يزيد، يتمدد) معناها الإشارة + موجبة

* مكعب جليدي يذوب بمعدل $0.01 \text{ cm}^3 / \text{min}$... الخ.

$$\frac{dV}{dt} = - 0.01 \text{ cm}^3 / \text{min}$$

* مرشح مخروطي يصب فيه سائل بمعدل $0.3 \text{ m}^3 / \text{h}$... الخ.

$$\frac{dV}{dt} = + 0.3 \text{ m}^3 / \text{h}$$

ثالثاً: الثابت في السؤال

عندما يعطى (مساحة - حجم) ثابت فهنا نستخدم قانون المساحة أو الحجم لإيجاد مجهول معين

▶ اسطوانة ذات حجم ثابت $125 \pi \text{ cm}^3$ ارتفاعها 5 cm ... الخ

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h$$

$$[125 \pi = \pi r^2 5] + 5$$

$$r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

▶ صفيحة مستطيلة ذات مساحة ثابتة دائماً 90 cm^2 وطولها 9 cm ... الخ

$$\Rightarrow A = x y$$

$$90 = 9 (y)$$

$$y = \frac{90}{9} = 10 \text{ cm}$$

رابعاً: الاشتقاق بالنسبة للزمن يكون اشتقاق اعتيادي ولكن عند اشتقاق x نضرب بـ $\frac{dx}{dt}$ وعند اشتقاق y نضرب بـ $\frac{dy}{dt}$ وهكذا... لاحظ الامثلة التالية:

4 $A = x \cdot y$

$$\frac{dA}{dt} = x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt}$$

1 $x^2 + y^2 = 10$

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

5 $V = \frac{\pi}{12} h^3$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3 h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

2 $\sin x = y$

$$(\cos) \cdot (1) \cdot \frac{dx}{dt} = (1) \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\cos x \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

6 $V = (3+2x)^3$

$$\frac{dV}{dt} = 3 (3+2x)^2 (2) \cdot \frac{dx}{dt}$$

3 $V = \pi r^2 \cdot h$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left[r^2 \cdot \frac{dh}{dt} + h \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt} \right]$$

الجزء الأول / الأشكال الهندسية

سؤال 2 اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل 0.5 cm/s بحيث يبقى الحجم ثابت ويساوي $320\pi \text{ cm}^3$ جد معدل التغير في نصف القطر عندما يكون الارتفاع 5 cm

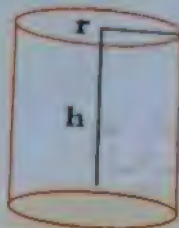
نفرض نصف قطر الاسطوانة $r =$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $h =$

$$\frac{dh}{dt} = 0.5 \text{ cm/s}$$

$$V = 320\pi \text{ cm}^3 \text{ ثابت}$$

$$\frac{dr}{dt} = ? \quad h = 5 \text{ cm}$$



نبدأ بالثابت لايجاد معلومة نحتاجها فيها بعد.

$$V = \pi r^2 h$$

$$320\pi = \pi (r^2) (5)$$

$$r^2 = \frac{320}{5} = 64 \Rightarrow r = 8 \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 320\pi = \pi r^2 h$$

$$320 = r^2 h$$

$$0 = r^2 \cdot \frac{dh}{dt} + h (2r) \frac{dr}{dt}$$

$$0 = (8)^2 \cdot (0.5) + (5)(2)(8) \frac{dr}{dt}$$

$$0 = (64)(0.5) + 80 \frac{dr}{dt}$$

$$\left[-32 = 80 \frac{dr}{dt} \right] + 80$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-2}{5} \text{ cm/s}$$

سؤال 1 صفيحة مستطيلة من البعدت مساحتها 96 cm^2 يتبدد طولها بمعدل 2 cm/s بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في عرضها عندما يكون العرض 8 cm

نفرض طول المستطيل $x =$

نفرض عرض المستطيل $y =$

$$\text{معدل تغير الطول} = \frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$$

$$\text{معدل تغير العرض} = \frac{dy}{dt} = ?$$

$$y = 8 \text{ cm} \quad x = ? \quad A = 96 \text{ cm}^2$$

$$A = x \cdot y$$

$$96 = (x)(8)$$

$$x = \frac{96}{8} \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

$$A = xy \Rightarrow 96 = xy$$

$$0 = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} \quad \text{اشتقاق}$$

$$0 = (12) \frac{dy}{dt} + (8)(2)$$

$$-16 = 12 \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-4}{3} \text{ cm/s}$$

نبدأ بالثابت لايجاد معلومة نحتاجها فيها بعد.

2011 / 2د

2014 / 3د

2015 / 4د

2016 / 1د / خارج القطر

سؤال 4 اسطوانة دائرية قائمة بصب فيها ماء، فيعدل تغير زمني في ارتفاع الماء 40 cm/s جد معدل التغير في حجم الماء إذا كانت نصف قطر قاعدة الاسطوانة يساوي 10 cm .

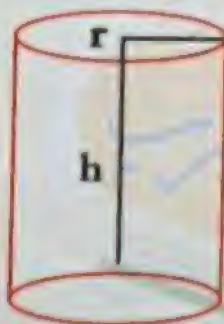
نفرض نصف قطر الاسطوانة $r =$

نفرض ارتفاع الاسطوانة $h =$

$$\frac{dh}{dt} = +40 \text{ cm/s}$$

$$r = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$



$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \pi (10)^2 \cdot h$$

$$V = 100 \pi h$$

$$\frac{dv}{dt} = 100 \pi \frac{dh}{dt}$$

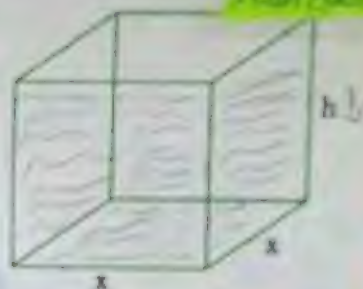
$$\frac{dv}{dt} = 100 \pi (40)$$

$$\frac{dv}{dt} = 4000 \pi \text{ cm}^3/\text{s}$$

2017 / 2د / تطبيقي

سؤال 3 خزانات مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل طولها (2 m) ينصرف منه الماء فيعدل $(0.4 \text{ m}^3/\text{h})$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزانات عند أي زمن t .

نفرض طول ضلع القاعدة $x =$



نفرض طول ضلع القاعدة $x =$

نفرض الارتفاع $h =$

$$x = 2 \text{ m}$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$\frac{dv}{dt} = -0.4 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$V = x^2 \cdot h$$

$$V = (2)^2 \cdot h$$

$$V = 4h$$

$$\frac{dv}{dt} = 4 \frac{dh}{dt}$$

$$-0.4 = 4 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-0.4}{4}$$

$$\frac{dh}{dt} = -0.1 \text{ m/h}$$

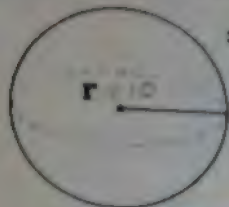
يمكن التعويض بـ $x=2$ لأنها ثابتة

1د / 2011

2د / 2013

سؤال 6 بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فإذا

كان معدل نقصان نصف قطره $\frac{7}{22}$ cm/s بحيث يبقى محافظاً على شكله فعندما يكون نصف قطره 10 cm جد:



1 معدل نقصان حجمة.

نفرض نصف قطر الكرة البالون r

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{7}{22} \text{ cm/s}, \quad r = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$

$$\frac{4}{3} \cdot \pi$$

15/2004

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4 \pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4 \left(\frac{22}{7} \right) (10)^2 \cdot \left(-\frac{7}{22} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -400 \text{ cm}^3/\text{s}$$

2 معدل نقصان مساحته السطحية.

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$A = 4 \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8 \pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8 \cdot \frac{22}{7} (10) \cdot \left(-\frac{7}{22} \right)$$

$$\frac{dA}{dt} = -80 \text{ cm}^2/\text{s}$$

سؤال 5 متوازي سطوح مستطيلة تتغير

ابعاده بحيث تبقى القاعدة

مربعة يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل

0.3 cm/s وارتفاعه يتناقص بمعدل

0.5 cm/s جد معدل تغير الحجم عندما

يكون طول ضلع القاعدة 4 cm

والارتفاع 3 cm



نفرض طول ضلع القاعدة x

نفرض الارتفاع h

$$\frac{dx}{dt} = 0.3 \text{ cm/s}, \quad \frac{dh}{dt} = -0.5 \text{ cm/s}$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$

$$h = 3 \text{ cm}, \quad x = 4 \text{ cm}$$

$$V = x^2 \cdot h$$

$$\frac{dv}{dt} = x^2 \cdot \frac{dh}{dt} + h \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = (4)^2 (-0.5) + (3)(2)(4)(0.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = (16)(-0.5) + (24)(0.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = -8 + 7.2$$

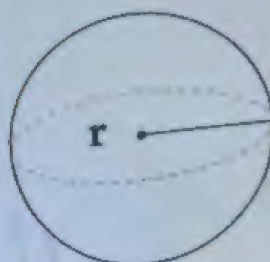
$$\frac{dv}{dt} = -0.8 \text{ cm}^3/\text{s}$$

حيدر وليد

سؤال 7

بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقبه يتسرب منه الغاز فاذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره 200π احسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل نقصان في مساحته السطحية $80 \text{ cm}^2/\text{s}$.

2008/2 د



نصف قطر = r
قطر = $2r$

نفرض نصف قطر البالون r

نفرض معدل تغير الحجم $\frac{dv}{dt}$

نفرض معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt}$

نفرض معدل تغير المساحة $\frac{dA}{dt}$

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d(2r)}{dt}} = \frac{200\pi}{1} \Rightarrow \frac{\frac{dv}{dt}}{2 \cdot \frac{dr}{dt}} = \frac{200\pi}{1}$$

$$\frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$400\pi \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$[400 = 4r^2] \div 4 \Rightarrow r^2 = 100$$

$$r = 10 \text{ cm}$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$-80 = 8\pi (10) \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-80}{80\pi} = \frac{-1}{\pi} \text{ cm/s}$$

$$\frac{dv}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt} = 400\pi \left(\frac{-1}{\pi}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -400 \text{ cm}^3/\text{s}$$

سؤال 8

متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل وحجمه دائماً 108 cm^3 فاذا كان معدل ازدياد ارتفاعه $\frac{3}{4} \text{ cm/s}$ جد معدل تغير طول ضلع القاعدة عندما يكون الارتفاع 12 cm .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-3}{32} \text{ cm/s} \quad / \text{ج}$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
= محيط القاعدة \times الارتفاع + مساحة القاعدتين



$$A = 4(x) \cdot (3x) + 2 \cdot x^2$$

$$A = 12x^2 + 2x^2$$

$$A = 14x^2$$

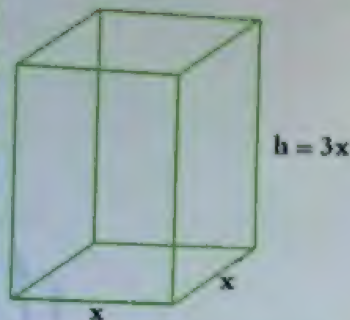
$$\frac{dA}{dt} = 28x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 28 \left(\frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{dA}{dt} = 56 \text{ cm}^2 / \text{s}$$

أنت الذي أهديتني حريتي
وهويتني وجعلت مني سيدا
وأعدت لي فرحك وسحر طفولتي
من دون أن تدري ولا أن تقصدا
أنت الذي لو لأك عشت بلا غد
وبقيت بالأمس البعيد مقيدا

سؤال 9 متوازي سطوح مستطيلة
قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ثلاثة أمثال
طول القاعدة ويتهدد بالحرارة جد معدل
تغير حجمه ومساحته الكلية عندما يكون
طول ضلع القاعدة = 8 cm علماً أن معدل
تغير طول ضلع القاعدة $\frac{1}{4} \text{ cm/s}$



نفرض طول ضلع القاعدة = x

الارتفاع = $3x$

$$x = 8 \text{ cm}, \quad \frac{dA}{dt} = ?, \quad \frac{dv}{dt} = ?$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4} \text{ cm/s}$$

$$V = x^2 \cdot h$$

$$V = x^2 (3x)$$

$$V = 3x^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 9x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 9(8)^2 \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = 9(64) \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$\frac{dv}{dt} = 144 \text{ cm}^3 / \text{s}$$

مسائل التعمد هي كل سؤال يكون رسمه بشكل مثلث قائم الزاوية ونستفيد من القوانين التالية لحل المسائل

نستفيد من هذه القوانين في حال اعطيت أو طلت معدل تغير الزاوية.

نستخدم هذا القانون لإيجاد علاقة تربط x مع y عندما يعطى زاوية.

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

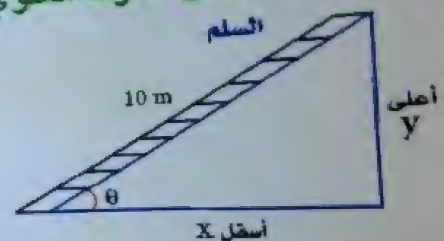
$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

① نستخدمه قبل الاشتقاق
لايجاد مجهول

② نستخدمه بعد الاشتقاق
لايجاد معدل زمني

سؤال 10

سلم طوله 10 m يستند طرفه الأعلى حائط رأسي وطرفه الأسفل على أرض أفقية فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8 m جد:
أولاً: معدل انزلاق الطرف العلوي.



$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \right] \div 2$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$8(2) + (6) \left(\frac{dy}{dt} \right) = 0$$

$$\left[6 \frac{dy}{dt} = -16 \right] \div 6 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \text{ m/s}$$

ثانياً: معدل تغير الزاوية بين السلم والأرض.

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{10} \quad \frac{y}{10} \xrightarrow{\text{المقابل}} \frac{1}{10} y$$

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{x}{10} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{dy}{dt} \quad (\text{مجاور}) \quad (\text{وتر})$$

$$\frac{8}{10} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10} \frac{-8}{3} \quad \text{تعويض}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{3} \text{ rad/s}$$

1 د / 2012

2 د / 2014

2014 / تمهيدى

x = نفرض بعد الطرف الأسفل

y = نفرض بعد الطرف العلوي

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}, \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

$$x = 8 \text{ m}, \quad y = ?$$

$$x^2 + y^2 = (10)^2$$

$$(8)^2 + y^2 = (10)^2 \Rightarrow 64 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 100 - 64 \Rightarrow y^2 = 36 \quad \text{بالجذر}$$

$$y = 6 \text{ m}$$

$$x^2 + y^2 = (10)^2 \quad \text{نشتق بالنسبة للزمن}$$

$$\left[(x)(2) + (\sqrt{3}x) \frac{dy}{dt} = 0 \right] + x, x \neq 0$$

$$2 + \sqrt{3} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\left[\sqrt{3} \frac{dy}{dt} = -2 \right] + \sqrt{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \text{ m/s}$$

2013 / د1 / خارج القطر

2015 / د1 / خارج القطر

2015 / وصافة

2016 / د2 / الزاوية $\frac{\pi}{4}$

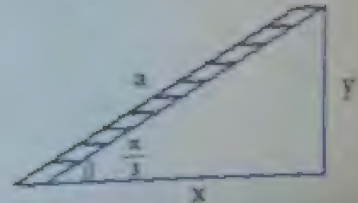
واجب: سلم طوله 10m يتكى طرفه الاسفل على ارض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بحيث يكون معدل تغير الزاوية بين السلم والأرض $\frac{1}{3} \text{ rad/s}$ جد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8m.

مشابه السؤال

10

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \text{ m/s}$$

سؤال 11 سلم يعتمد طرفه الاسفل على ارض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 m/s جد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض $\frac{\pi}{3}$.



$x =$ نفرض بعد الطرف الأسفل

$y =$ نفرض بعد الطرف العلوي

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{dy}{dt} = ? \quad \frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \right] \div 2$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{y}{x}$$

$$y = \sqrt{3} x \dots\dots\dots (2)$$

طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الأول بسرعة 80 km/h وتسير سيارة على الطريق الآخر بسرعة 60 km/h جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة.

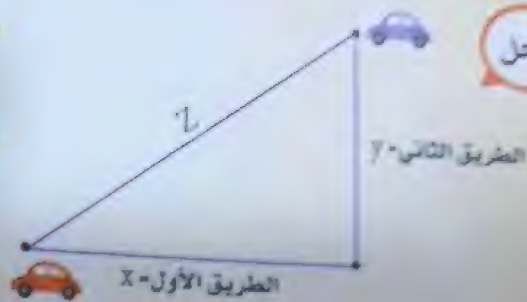
سؤال 12

سرعة الطريق الأول $\frac{dx}{dt} = 80 \text{ km/h}$

سرعة الطريق الثاني $\frac{dy}{dt} = 60 \text{ km/h}$

معدل ابتعاد السيارتين $\frac{dz}{dt} = ?$

(الوقت ربع ساعة) $t = \frac{1}{4} \text{ h}$



الزمن \times السرعة = الإزاحة

$$x = 80 \times \frac{1}{4} = 20 \text{ km}$$

$$y = 60 \times \frac{1}{4} = 15 \text{ km}$$

$$1600 + 900 = 25 \frac{dz}{dt}$$

$$\left[2500 = 25 \frac{dz}{dt} \right] \div 25$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2500}{25}$$

$$\frac{dz}{dt} = 100 \text{ km/h}$$

تمويض دون
انشقاق

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= Z^2 \\ (20)^2 + (15)^2 &= Z^2 \\ 400 + 225 &= Z^2 \\ Z^2 &= 625 \end{aligned}$$

بالجذر

$$\Rightarrow Z = 25 \text{ km}$$

نشتق بالنسبة للزمن $x^2 + y^2 = Z^2$

$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2Z \frac{dz}{dt} \right] \div 2$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = Z \frac{dz}{dt} \quad \text{تمويض}$$

$$(20)(80) + (15)(60) = 25 \frac{dz}{dt}$$

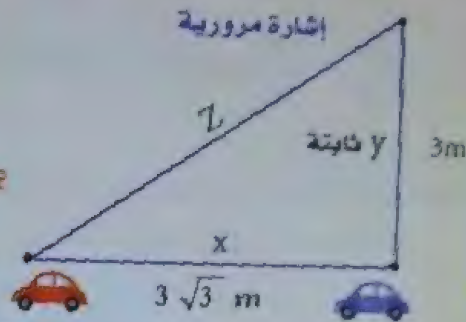
سيارة تسير بسرعة (30 m/s) اجتازت إشارة مرورية على ارتفاع (3m) وبعد ان ابتعدت مسافة $3\sqrt{3}$ m عن قاعدة العمود اصطدمت بسيارة أخرى بسبب عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين الإشارة والسيارة.

سؤال 13

الحل

$$\frac{dx}{dt} = 30 \text{ m/s}$$

$$\frac{dz}{dt} = ? \quad x = 3\sqrt{3} \quad y = 3 \text{ m} \quad Z = ?$$



المسألة هي
ثابت
السيارة
المسافة بين
الإشارة والسيارة

المسألة هي
المسافة بين
السيارة والسيارة

المسألة هي
المسافة بين
السيارة والسيارة

المسألة هي
المسافة بين
السيارة والسيارة

المسألة هي
المسافة بين
السيارة والسيارة

المسألة هي
المسافة بين
السيارة والسيارة

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= Z^2 \\ (3\sqrt{3})^2 + (3)^2 &= Z^2 \\ 27 + 9 &= Z^2 \\ Z^2 &= 36 \end{aligned}$$

بالجذر

$$Z = 6 \text{ m}$$

$$x^2 + y^2 = Z^2$$

1997 / د1

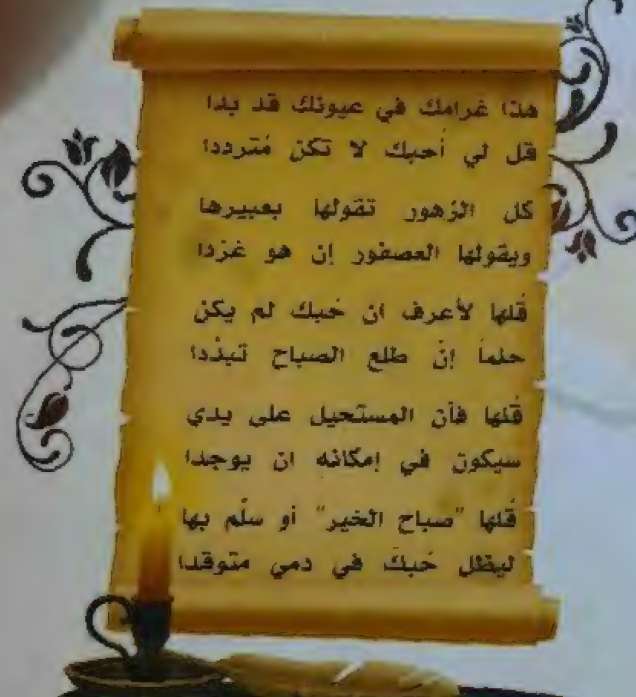
$$x^2 + (3)^2 = Z^2 \quad \text{تعويض } y \text{ لأنه ثابت}$$

$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 0 = 2Z \frac{dz}{dt} \right] \div 2 \quad \text{اشتقاق}$$

$$(3\sqrt{3})(30) = (6) \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(30)(3\sqrt{3})}{6}$$

$$= \frac{dz}{dt} = 15\sqrt{3} \text{ m/s}$$



هذا غرامك في عيونك قد بدا
قل لي أحبك لا تكن مُترددا
كل الزهور تقولها بعبيرها
ويقولها العصفور إن هو غزدا
قلها لأعرف أن خبك لم يكن
حلماً إن طلع الصباح تيزدا
قلها فأن المستحيل على يدي
سيكون في إمكانه أن يوجد
قلها "صباح الخير" أو سلم بها
ليظل خبك في دمي متوقدا

تنبيه

في هذا السؤال خطأ في الصياغة ولكي يكون منطقياً يجب ان يكون العمود غير مستقر في الأرض والإشارة معلقة وتهر السيارة تحنها مباشرة وعندها ستكون $z = 3\sqrt{3}$

الجزء الثالث / النقاط على منحنى

الحالة الأولى: عندما يطلب نقطة أو نقاط تنتمي إلى منحنى بدون أن يذكر معدل اقتراب أو ابتعاد.

- 1 نشتق علاقة السؤال الأصلية بالنسبة للزمن.
- 2 نجد علاقة بين $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ من السؤال أو نعوض $\frac{dy}{dt}$ ، $\frac{dx}{dt}$ إذا أعطي

في السؤال بشكل ارقام .
3 تكون معادلة من العلاقة بعد الاشتقاق ثم تحوّل هذه المعادلة بعلاقة السؤال الأصلية.

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$$

$$x^2 + (2-x)^2 + 4x - 8(2-x) = 108$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4x - 16 + 8x - 108 = 0$$

$$[2x^2 + 8x - 120 = 0] + 2$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0 \text{ تجربة}$$

$$(x+10)(x-6) = 0$$

$$x+10=0 \Rightarrow x=-10$$

$$x-6=0 \Rightarrow x=6$$

$$y=2-x \quad x=-10 \text{ عندما}$$

$$y=2-(-10) \Rightarrow y=12$$

$$(-10, 12)$$

$$x=6 \text{ عندما}$$

$$y=2-6 \Rightarrow y=-4$$

$$(6, -4)$$

2014/نازحين

2019/تمهيدى

سؤال 14 كتاب

الحل

جد نقط تنتمي إلى الدائرة

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$$

المعدل الزمني لتغير x مساوياً

للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة

للزمن t .

نشتق علاقة السؤال $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$

$$\left[2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 4 \frac{dx}{dt} - 8 \frac{dy}{dt} = 0 \right] + 2$$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + 2 \frac{dx}{dt} - 4 \frac{dy}{dt} = 0$$

علاقة بين $\frac{dy}{dt}$ ، $\frac{dx}{dt}$ من السؤال $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dx}{dt} + 2 \frac{dx}{dt} - 4 \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} (x + y + 2 - 4) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ يهمل}$$

$$x + y - 2 = 0$$

$$y = 2 - x \quad (1)$$

نعوضها في العلاقة المعطاة في السؤال

تتحرك نقطة على المنحني $xy = x + y + 7$ وكانت معدل تغيير إحداثياتها السيني بالنسبة للزمن (2unit/s) ومعدل تغيير إحداثياتها الصادي بالنسبة للزمن (-1unit/s) جد إحداثيات النقطة.

سؤال 15
إضافي

أما $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

أو $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

$x = 2y - 1$ عندما $y = 3$

$x = 2(3) - 1$

$x = 6 - 1 \Rightarrow x = 5$

$P_1 = (5, 3)$

$x = 2(-1) - 1$ عندما $y = -1$

$x = -2 - 1 \Rightarrow x = -3$

$P_2 = (-3, -1)$

واجب: تتحرك نقطة على المنحني $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$ أوجد إحداثيات النقطة إذا كان معدل تغيير إحداثياتها السيني بالنسبة للزمن ضعف معدل تغيير إحداثياتها الصادي بالنسبة للزمن.

ج/ $(-1, 2), (3, -6)$

$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = -1$

نشتق العلاقة $xy = x + y + 7$

$x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$

$(x)(-1) + (y)(2) = 2 - 1$

$-x + 2y = 1 \Rightarrow 2y - 1 = x$

$x = 2y - 1$ نعوضها بالأصلية

$x \cdot y = x + y + 7$

$(2y - 1) \cdot y = 2y - 1 + y + 7$

$2y^2 - y = 3y + 6$

$2y^2 - y - 3y - 6 = 0$

$[2y^2 - 4y - 6 = 0] \div 2$

تجربة $y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y - 3)(y + 1) = 0$

الخطوة الثانية: عندما يعطى أو يطلب معدل اقتراب أو ابتعاد $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ نتبع الخطوات التالية:

1. نطبق قانون المسافة $S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
2. نعوض (x_2, y_2) , (x_1, y_1)
3. نجعل المعادلة بدلالة x فقط أو y فقط بالاستعانة بعلاقة السؤال.
4. نشق بالنسبة للزمن ونجد ما هو مطلوب.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 49)^{-\frac{1}{2}} (2x - 10) \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{8 - 10}{2\sqrt{16 - 40 + 49}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{-2}{10} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \text{ unit/s}$$

3د / 2016

2016 / تمهيدى

1د / 2013

واجب: نقطة تتحرك على القطع الكافى $y^2 = 8x$ مبتعدة عن النقطة $(2, 0)$ بسرعة 0.7 unit/s جد معدل تغير الاحداثى السيني في اللحظة التي يكون عندها $x = 8$.

$$\frac{dx}{dt} = 0.7 \text{ unit/s}$$

سؤال 16 لتكن (M) نقطة متحركة

على منحنى القطع الكافى $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة $(7, 0)$ يساوي 0.2 unit/s جد المعدل الزمني لتغير الاحداثى السيني للنقطة (M) عندما تكون $x = 4$.

(x_1, y_1)

(x_2, y_2)

$(7, 0)$

M (x, y)

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 0)^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$S = (x^2 - 10x + 49)^{\frac{1}{2}}$$

إذا لم يعطى
بالسؤال القيمة
التي كانت
يمكن استخراجها
من العلاقة القطع
لصاف
لا يمكن فصل
البور

سؤال 17 لتكن M نقطة نتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0, \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

$$9y^2 - 4y^2 - 18y + 8y = 0$$

$$[5y^2 - 10y = 0] + 5$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y(y - 2) = 0$$

تعمل $y = 0$ أما

$$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$y = x^2 \Rightarrow 2 = x^2 \text{ بالجذر}$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$(\pm \sqrt{2}, 2)$$

2018 / 2د / احيائي

2014 / 1د

2012 / 2د

تنبيه وزاري

في سنة (2014 / 1د) تم تغيير صيغة السؤال حيث استبدل كلمة ثلثي ووضع مكانها كلمة ثلث فكان الناتج غريب.

$$x = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}}$$

قصة (تليق)
تليق

ثلاثين اثنين
 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \Rightarrow 2(\frac{1}{3})$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$x_1, y_1 \quad x_2, y_2$$

$$(0, \frac{3}{2}) \quad M(x, y)$$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - \frac{3}{2})^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \quad x^2 = y$$

$$S = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

$$S = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$S = (y^2 - 2y + \frac{9}{4})^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} (y^2 - 2y + \frac{9}{4})^{-\frac{1}{2}} (2y - 2) \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y - 2}{2 \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{2(y - 1)}{2 \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{(y - 1)}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$$

$$2 \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3$$

$$4(y^2 - 2y + \frac{9}{4}) = 9y^2 - 18y + 9$$

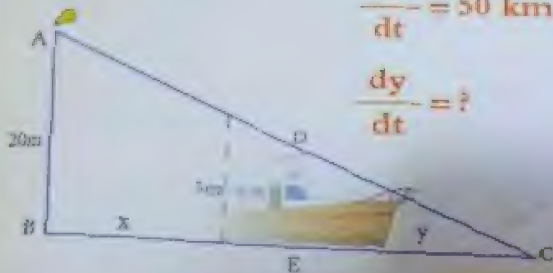
$$4y^2 - 8y + 9 = 9y^2 - 18y + 9$$

لا يتصور ان
تربع الطرفين
عندما يوجد
جذر

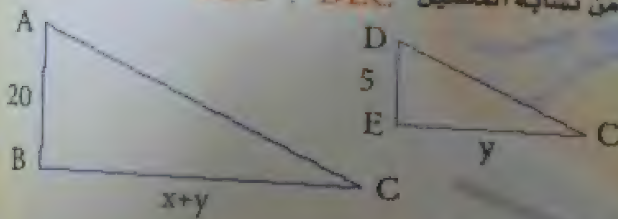
سؤال 19 فنار ميناء ارتفاعه 20m يعلوه مصباح كبير تحركت سفينة ارتفاعها 5m مبتعدة عن الفناء بسرعة 50 km/h جد تغيير طول ظل السفينة على سطح البحر.

$$\frac{dx}{dt} = 50 \text{ km/h}$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$



من تشابه المثلثين ABC , DEC



$$\frac{20}{5} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \frac{4}{1} \times \frac{x+y}{y}$$

$$4y = x + y \Rightarrow 3y = x$$

$$3 \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$3 \frac{dy}{dt} = 50$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{50}{3} \text{ km/h}$$

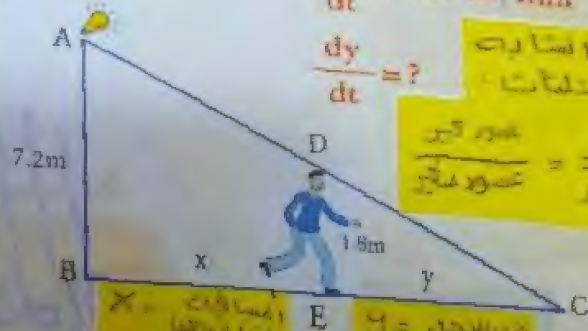
في قانون تشابه
المثلثات:
اليس بالفروري تحويل
الوحدات

1a/2016 / خارج القطر

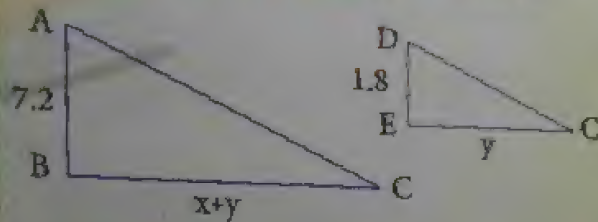
سؤال 18 عمود طوله 7.2 m في نهايته مصباح ينحرك رجل طوله 1.8 m مبتعداً عن العمود وبسرعة 30 m/min جد معدل تغيير طول ظل الرجل.

$$\frac{dx}{dt} = +30 \text{ m/min}$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$



من تشابه المثلثين ABC , DEC



$$\frac{7.2}{1.8} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \frac{4}{1} \times \frac{x+y}{y}$$

$$4y = x + y \Rightarrow 3y = x$$

$$3 \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$3 \frac{dy}{dt} = 30$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{30}{3} = 10 \text{ m/min}$$

2012 / تمهيد

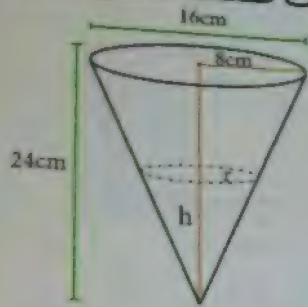
2014 / تمهيد

2015 / تمهيد

1a/2013

1a/2015

سؤال 21 مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل وارتفاعه 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5 \text{ cm}^3/\text{s}$ ويتسرب منه سائل بمعدل $1 \text{ cm}^3/\text{s}$ احسب معدل التغيير في نصف قطر السائل عندما يكون نصف القطر 6cm.



r = نصف قطر السائل
 h = ارتفاع السائل

إذا معدل التغير
يصحاح المعدل
بالمعدل الحجم
وحدته cm^3/s
تكون
حجم

$$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\frac{dr}{dt} = ? \quad r = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{24}{h} \times \frac{8}{r} \Rightarrow [24r = 8h] \div 8$$

$$h = 3r$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 (3r) \Rightarrow V = \pi r^3$$

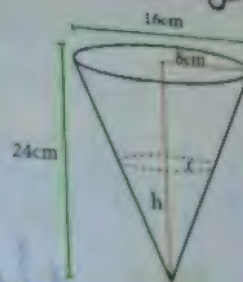
$$\frac{dv}{dt} = 3 \pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$4 = 3 \pi (6)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{3 \pi (36)}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{27 \pi} \text{ cm/s}$$

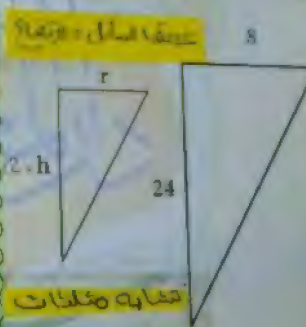
سؤال 20 مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل وارتفاعه 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5 \text{ cm}^3/\text{s}$ ويتسرب منه سائل بمعدل $1 \text{ cm}^3/\text{s}$ جد معدل تغيير عمق السائل عندما يكون عمق السائل 12cm.



r = نصف قطر السائل
 h = ارتفاع السائل

$$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\frac{dh}{dt} = ? \quad h = 12 \text{ cm}$$



من تشابه المثلثين

$$\frac{24}{h} = \frac{8}{r}$$

$$[24r = 8h] \div 8$$

$$r = \frac{1}{3} h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{3} h\right)^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{9} h^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{\pi}{27} h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$4 = \frac{\pi}{9} (12)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$4 = 16 \pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4 \pi} \text{ cm/s}$$

2017 / 4 د / النبار

2016 / نازحين

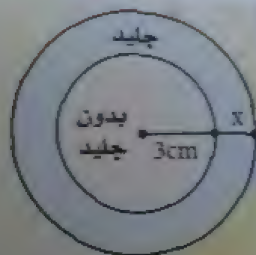
سؤال 23 كرة صلبة نصف قطرها 3cm

مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى الشكل ثابتاً فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $4 \text{ cm}^3/\text{s}$ حدد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون السمك فيها 1cm.

x = نفوذ سمك الجليد

$\frac{dx}{dt}$ = معدل تغير سمك الجليد

$\frac{dv}{dt} = -4 \text{ cm}^3/\text{s}$



حجم الجليد = حجم الشكل - حجم الأصلي
مع الجليد بدون جليد

$V = \frac{4}{3} \pi (3+x)^3 - \frac{4}{3} \pi (3)^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3} \pi (3+x)^2 \frac{dx}{dt} - 0$

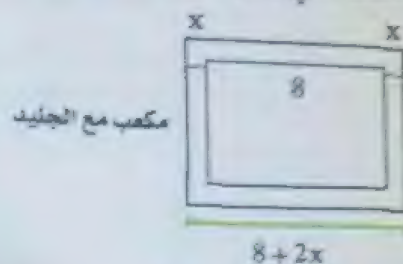
$-4 = \frac{4}{3} \pi (3+1)^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow -1 = \pi (4)^2 \frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{16\pi} \text{ cm/s}$

أعطي معدل 9.9 بان
الجبر
طلب معدل نقصان
سمك الجليد
يجب إيجاد حجم الجليد
في تلك اللحظة
محدد

سؤال 22 مكعب صلب طول حرفه 8cm

مغطى بطبقة من الجليد بحيث يبقى الشكل مكعباً فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6 \text{ cm}^3/\text{s}$ حدد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها السمك 1cm.



مكعب مع الجليد

x = نفوذ سمك الجليد

$\frac{dx}{dt}$ = معدل نقصان سمك الجليد

$\frac{dv}{dt} = -6 \text{ cm}^3/\text{s}$

حجم الجليد = حجم الشكل - حجم الأصلي
مع الجليد بدون جليد

$V = (8+2x)^3 - (8)^3$

$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2 (2) \frac{dx}{dt} - 0$

$-6 = 3(8+2(1))^2 (2) \frac{dx}{dt}$

$-6 = 600 \frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-6}{600} = \frac{-1}{100} = -0.01 \text{ cm/s}$

2014-2011 / 13 / خارج القطر

2
الاحيائي
التطبيقي
تطبيقات التفاضل

مبرهنة رول

أولاً: الدالة كثيرة الحدود، هي الدالة التي لا تحتوي على كسر (لا يوجد x بالقام) والحد (لا يوجد x داخل الجذر) والأسس موجبة.

$f(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow$ كثيرة الحدود

$f(x) = x^3 - x \Rightarrow$ كثيرة الحدود

$f(x) = x^3 - x^{-1} \Rightarrow$ غير كثيرة الحدود $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ (دالة نسبية)

خطوات الحل للدالة كثيرة الحدود

أولاً: الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ لأنها كثيرة الحدود.
ثانياً: قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على المفتوحة (a, b) لأنها كثيرة الحدود.
ثالثاً: تعويض: نعوض طرفي الفترة $[a, b]$ بالدالة الأصلية.

$f(a) = f(b)$

خطوات ما بعد التحقق

- 1 نشق الدالة $\bar{f}(x)$
- 2 نعوض بدل كل x بـ c $\bar{f}(c)$
- 3 نساوي المشتقة للصفر $\bar{f}'(c) = 0$ ونجد c

ex: مغلقة $[-3, 3]$ عناصرها $\Rightarrow \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ex: مفتوحة $(-3, 3)$ عناصرها $\Rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

تنبيه

إن تحققت الشروط جميعها يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ c تنتمي للفترة المفتوحة.

سؤال 2 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة $f(x) = x^2 - 3x$ للفترة $[-1, 4]$ وان تحقق جد قيم C

الحل

أولاً، الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 4]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 4)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً، نعوض طرفي في الفترة $[-1, 4]$ في الدالة.

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$$

$$f(b) = f(4) = (4)^2 - 3(4) = 16 - 12 = 4$$

$$\therefore f(a) = f(b)$$

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$\bar{f}(x) = 2x - 3$$

$$\bar{f}(c) = 2c - 3 \Rightarrow 2c - 3 = 0$$

$$\Rightarrow [2c = 3] + 2 \quad \text{تمهيدى/تطبيقي 2017}$$

$$c = \frac{3}{2} = 1.5 \in (-1, 4)$$

سؤال 1 بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة:

$f(x) = x^3 - 9x$ للفترة $[-3, 3]$ وان تحقق جد قيم C

أولاً، الدالة مستمرة هي الفترة المغلقة $[-3, 3]$ لأنها كثيرة الحدود

ثانياً، الدالة قابلة للاشتقاق هي الفترة المفتوحة $(-3, 3)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً، نعوض طرفي في الفترة $[-3, 3]$ في الدالة.

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f(a) = f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$$

$$f(b) = f(3) = (3)^3 - 9(3) = 27 - 27 = 0$$

$\therefore f(a) = f(b)$ تحقق شروط مبرهنة رول

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 9$$

$$\bar{f}(c) = 3c^2 - 9$$

$$3c^2 - 9 = 0$$

$$[3c^2 = 9] \div 3$$

$$c^2 = 3 \quad \text{بالجذر التربيعي}$$

$$c = \pm \sqrt{3} \in (-3, 3)$$

بالسؤال
دالة
التي
بالجواب
الفترة
(مفتوحة)

سؤال 3

بين هل تنطبق شروط مبرهنة

رول على الدالة $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ للفترة $[-1, 1]$ وانت تحققت جد قيم C

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً، نعوض طرفي الفترة $[-1, 1]$ في الدالة.

$$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$$

2013/خ

$$f(a) = f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$$

$$f(b) = f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3 = 9 + 3 - 1 = 11$$

$$\therefore f(a) \neq f(b)$$

\therefore لا تتحقق شروط مبرهنة رول لعدم تحقق الشرط الثالث.

وما طربك لها رأيتك بدعة
لقد كنت أرجو أن أراك فأطرب
وتعدل فيك القوافي وهمتي
كأنني بمدح قبل مدحك مدني

سؤال 4

بين هل تنطبق شروط مبرهنة

رول على الدالة $f(x) = (x^2 - 3)^2$ للفترة $[-1, 1]$ وانت تحققت جد قيم C

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً، نعوض طرفي الدالة $[-1, 1]$ في الدالة.

$$f(x) = (x^2 - 3)^2$$

$$f(a) = f(-1) = ((-1)^2 - 3)^2 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$f(b) = f(1) = (1^2 - 3)^2 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$$

\therefore تتحقق شروط مبرهنة رول.

$$f(a) = f(b)$$

$$f(x) = (x^2 - 3)^2$$

$$\bar{f}(x) = 2(x^2 - 3) \cdot (2x)$$

$$\bar{f}(x) = 4x(x^2 - 3)$$

$$\bar{f}(c) = 4c(c^2 - 3)$$

$$4c(c^2 - 3) = 0$$

$$\text{أما } [4c = 0] \div 4$$

$$c = 0 \in (-1, 1)$$

$$\text{بالجذر } c^2 - 3 = 0 \Rightarrow c^2 = 3$$

$$c = \pm \sqrt{3} \notin (-1, 1)$$



سؤال 5

جد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول للدالة $h(x) = x^3 - x$ ، $[-1, 1]$

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً،

$$h(x) = x^3 - x$$

$$h(a) = h(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$$

$$h(b) = h(1) = (1)^3 - 1 = 0$$

$$h(a) = h(b)$$

$$\bar{h}(x) = 3x^2 - 1$$

$$\bar{h}(c) = 3c^2 - 1$$

$$3c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3}$$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)$$

1 د / 2012

2016 - د (2) / خارج القطر

سؤال 6

جد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول للدالة $f(x) = (x-1)^4$ ، $[-1, 3]$

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 3]$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 3)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً،

$$f(x) = (x-1)^4$$

$$f(a) = f(-1) = (-1-1)^4 = (-2)^4 = 16$$

$$f(b) = f(3) = (3-1)^4 = (2)^4 = 16$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = 4(x-1)^3(1)$$

$$\bar{f}(c) = 4(c-1)^3$$

$$[4(c-1)^3 = 0] \div 4$$

$$(c-1)^3 = 0 \quad \text{بالبذر التكعيبي}$$

$$c-1=0 \Rightarrow c=1 \in (-1, 3)$$

2 د / 2011

2018 - د (2) / تطبيقي / خارج القطر

سؤال 7  بين هل ان مبرهنة رول تحقق قيعة C الممكنة

$$f(x) = (2-x)^2, \quad x \in [0, 4]$$

الحل

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 4]$ لأنها كثيرة الحدود.
ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 4)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثالثاً،

$$\left. \begin{aligned} f(a) &= f(0) = (2-0)^2 = 4 \\ f(b) &= f(4) = (2-4)^2 = 4 \end{aligned} \right\} f(a) = f(b)$$

2015 / تمهيد

$$\bar{f}(x) = 2(2-x)(-1) \Rightarrow \bar{f}(c) = -2(2-c)$$

2017 - د (2) / تطبيقي / موصل

$$[-2(2-c) = 0] \div -2$$

$$2-c=0 \Rightarrow c=2 \in (0, 4)$$

سؤال 8  بين هل ان مبرهنة رول تحقق للدالة

$$f(x) = k, \quad [a, b]$$

الحل

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ لأنها ثابتة.
ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) .

$$f(a) = f(b) = k$$

الدالة تحقق مبرهنة رول وقيعة C ضمن (a, b)

ثانياً، الدالة الشطرية:

سؤال 1

بين هل تنطبق شروط ميرهندة

رول على الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \forall x \geq 0 \\ -3x^2 - 4x & \forall x < 0 \end{cases} \quad [-2, 2]$$

وأت تحقق من جد قيم c

نولاً، الاستمرارية:

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -3x^2 - 4x$$

مستمرة لأنها كثيرة الحدود

$$x = 0$$

$$f(0) = (0)^2 - 4(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0)^2 - 4(0) = 0 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -3(0)^2 - 4(0) = 0 = L_2$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2, 2]$

ثانياً، قابلية الاشتقاق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \forall x \geq 0 \\ -3x^2 - 4x & \forall x < 0 \end{cases}$$

شروط اشتقاق تحدى

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x > 0 \\ -6x - 4 & x < 0 \end{cases}$$

$$\bar{f}(0) = \begin{cases} 2(0) - 4 = -4 \\ -6(0) - 4 = -4 \end{cases}$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2, 2)$

ثالثاً، نعوض طرفي الفترة $[-2, 2]$ في الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 0 \\ -3x^2 - 4x & x < 0 \end{cases}$$

$$f(a) = f(-2) = -3(-2)^2 - 4(-2) = -12 + 8 = -4$$

$$f(b) = f(2) = (2)^2 - 4(2) = 4 - 8 = -4$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 2x - 4 \\ -6x - 4 \end{cases} \Rightarrow \bar{f}(c) = \begin{cases} 2c - 4 \\ -6c - 4 \end{cases}$$

$$2c - 4 = 0 \Rightarrow [2c = 4] \div 2$$

$$c = 2 \notin (-2, 2)$$

$$-6c - 4 = 0 \Rightarrow [-6c = 4] \div -6$$

$$c = \frac{-2}{3} \in (-2, 2)$$

قيمة a نعوضها
"بالصغر"
قيمة b نعوضها
"بالأكبر"

سؤال 2: بين هل تنطبق شروط مبرهنة رول على الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \in [-1, 2] \\ -1 & x \in [-4, -1) \end{cases}$$

الحل

لا، الاستمرارية، مستمرة لأنها كثيرة الحدود $x > -1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$

مستمرة لأنها كثيرة الحدود $x < -1 \Rightarrow f(x) = -1$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = (-1)^2 + 1 = 2 \quad L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -1 \quad L_2$$

لا توجد نهاية: غير مستمرة عند $[-4, 2]$

\therefore لا تتحقق شروط مبرهنة رول لعدم تحقق الشرط الثالث.

لايجاد مجهول في المعادلة الشطرنج:

تحققا الدالة الشطرنج مبرهنة رول:

① من الاستمرارية نستخرج معادلة

① الاستمرارية قلنا $L_1 = L_2$

② من قابلية الاشتقاق نستخرج معادلة

② قابلية الاشتقاق $\bar{f}(x) = \bar{f}(x)$ الجوة

③ من $F_a = F_b$ نستخرج قيمة احد المجهولين

③ نعوها $[a, b]$ بدالة $F_a = F_b$

④ نحل المعادلتين بالحذف

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر التواصل الاجتماعي او اي ص مستنسخة وبيعها او عن اي ص وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل على علامة تجارية من وزارة الص هذا التجاوز لان ملازمتنا مسجلة بم العراقي المرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) واحالته الى السلطات القانونية وفي

توزيع هام جدا

2 ج و الاحيائي والتطبيقي تطبيقات

ثالثاً، الدالة النسبية، هي الدالة التي تحوي x بالمقام مثل :

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}, f(x) = \frac{1}{x} + x$$

قابلية الاشتقاق

الاستمرارية

1 نشتق الدالة.

1 نأخذ مقام الدالة ونساويه للصفر

ونجد قيم x .

2 نأخذ مقام الدالة ونساويه للصفر ونجد x

2 إذا كان $x \in [a, b]$ غير مستمرة

3 إذا كان $x \notin [a, b]$ مستمرة

مستمرة $x \in [a, b]$

ثالثاً، نعوض طرفي الفترة $[\frac{1}{2}, 2]$ بالدالة

$$f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + 4 = 5$$

$$f(b) = f(2) = 2(2) + \frac{2}{2}$$

$$= 4 + 1 = 5$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\bar{f}(c) = 2 - \frac{2}{c^2} \Rightarrow 2 - \frac{2}{c^2} = 0$$

$$2c^2 - 2 = 0 \Rightarrow c^2 = 1$$

$$c = \pm 1$$

$$c = -1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

سؤال 1 بين هل تنطبق شروط مبرهنة

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

حول على الدالة حيث $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ثم جد قيم c

$$x = 0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$f(k) = 2k + \frac{2}{k}$$

لا نحاسب عليها الطالب

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = 2k + \frac{2}{k}$$

الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$f(x) = 2x + 2x^{-1}$$

$$\bar{f}(x) = 2 + (-2x^{-2}) \Rightarrow \bar{f}(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

∴ قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

نعوض طرفي الفترة $[-1, 1]$ بالدالة

$$f(a) = f(-1) = \frac{3}{(-1)^2 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$f(b) = f(1) = \frac{3}{(1)^2 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\bar{f}(c) = \frac{-6c}{(c^2 - 4)^2}$$

$$\frac{-6c}{(c^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -6c = 0$$

نحل المعادلة

$$c = 0 \in (-1, 1)$$

وَمَكَثْتُ حِينَ لِقَائِهِ مُتَسَائِلًا

هَلْ يَفْدِرُ الشَّعْرَاءُ وَصَفَ كَمَالِهِ؟

سَبَحَانَ مَنْ سَوَى الْجَمَالَ يُوَجِّهِهِ

وَتَقَاسَمَ الْبَاقُونَ ثُلُثَ جَمَالِهِ

سؤال 2: بين هل نطبق شروط مبرهنة رول على الدالة $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$ حيث $x \in [-1, 1]$

$$x^2 - 4 = 0$$

أولاً، الاستمرارية،

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x = \pm 2 \notin [-1, 1]$$

$$f(k) = \frac{3}{k^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \frac{3}{k^2 - 4}$$

يمكن الاستغناء عنها

$$f(k) = \lim_{x \rightarrow k} f(x)$$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$

ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$\bar{f}(x) = \frac{(x^2 - 4)(0) - 3(2x)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$(x^2 - 4)^2 = 0 \quad \text{بالجذر}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \notin (-1, 1)$$

∴ قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$

ملاحظة $\cos x$, $\sin x$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق كما تعلمنا في الصف الخامس

$$\bar{f}(c) = -2 \sin 2c - 2 \sin c$$

$$[-2 \sin 2c - 2 \sin c = 0] \div -2$$

$$\sin 2c + \sin c = 0$$

$$2 \sin c \cdot \cos c + \sin c = 0$$

قانون نصف الزاوية

$$\sin c (2 \cos c + 1) = 0$$

$$\sin c = 0 \begin{cases} c = 0 \notin (0, 2\pi) \\ c = \pi \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

أما

$$2 \cos c + 1 = 0 \Rightarrow \cos c = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} = \text{زاوية الاسناد}$$

أولاً، الربع الثاني،


$$c = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)$$

توحيد مقامات

ثانياً، الربع الثالث،

$$c = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$$

توحيد مقامات

سؤال  بين هل نطبق شروط مبرهنة رول على الدالة

$$f(x) = \cos 2x + 2 \cos x, [0, 2\pi]$$

نولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 2\pi]$

ثانياً، قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 2\pi)$

ثالثاً،

$$f(x) = \cos 2x + 2 \cos x$$

$$f(a) = f(0) = \cos 0 + 2 \cos 0 = 1 + 2 = 3$$

$$f(b) = f(2\pi) = \cos 4\pi + 2 \cos 2\pi = 1 + 2 = 3$$

$$f(a) = f(b)$$

$$\bar{f}(x) = (-\sin 2x) \cdot 2 + 2(-\sin x)$$

$$\bar{f}(x) = -2 \sin 2x - 2 \sin x$$

دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ $f(x) = ax^2 - 4x + 5$

فإذا كانت $c \in (-1, b)$ ، $c = 2$ فجد قيمتي $a, b \in \mathbb{R}$



خطوات الحل

$$f'(x) = 2ax - 4$$

$$f'(c) = 2ac - 4$$

$$2ac - 4 = 0$$

$$2a(2) - 4 = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0$$

$$4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

تعويض

$$f(x) = ax^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$$

عناصر الفترة

$$f(a) = f(b)$$

$$f(-1) = f(b)$$

$$(-1)^2 - 4(-1) + 5 = b^2 - 4b + 5$$

$$1 + 4 = b^2 - 4b \Rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0$$

$$(b-5)(b+1) = 0$$

$$b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5$$

$$b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

يُهل

1 نشتق الدالة ونعوض بدل كل x بـ c

2 نساوي المشتقة للصفر ونعوض c

2018 - د (2) / تطبيقي

3 لإيجاد المجهول الموجود في الفترة نستخدم الشرط الثالث لمبرهنة رول $f(a) = f(b)$ ثم نعوض طرفي الفترة ونصبح لدينا معادلة ونجد منها المجهول.

نحصل على المعادلة المثلثية بعد الاشتقاق - المساواة بـ 0

خطوات حل المعادلة المثلثية :

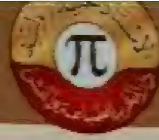
① نساوي زوايا المعادلة

② نفكر بالتحليل تجريبية

③ نجعل المعادلة ذات صنف واحد

كلها $\sin x$

كلها $\cos x$



مبرهنة القيمة المتوسطة

أولاً: الدوال كثيرات الحدود

شروطها وخطوات الحل (علماً أن هذه الخطوات ثابتة لجميع أنواع الدوال).

الشروط

ملاحظة

الاستمرارية وقابلية الاشتقاق لها
تعلماها في مبرهنة رول.

1 الاستمرارية.

2 قابلية الاشتقاق.

خطوات ما بعد تحقق الشروط

1 نعوض طرفي الفترة المغلقة $[a, b]$ بالدالة ونجد $f(a)$, $f(b)$.

لا يشترط تساوي الطرفين
 $f(a)$, $f(b)$

2 نشتق الدالة $f'(x)$

3 نعوض بدل كل x بـ c ونجد $f'(c)$

4 نطبق القانون :
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق التواصل الاجتماعي او ايصالها باليوبيل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او نسخها مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال قانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال . علماً ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتأكد وأحذر ان هناك هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موحدة العراقي المرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل بمرقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوج واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف . لذا اقتضى التنويه

تجارتهم جداً

الأحيائي
والتطبيقي

2

تطبيقات التفاضل

50

ملازم دار المغرب

سؤال 2 اختبر إمكانية تطبيق

مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة
 $f(x) = x^2 - 6x + 4$, $[-1, 7]$ وان
 تحققت جد قيم c .

الحل

أولاً، الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة
 المخلقة $[-1, 7]$ لأنها كثيرة الحدود.
 ثانياً، قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق
 على الفترة المفتوحة $(-1, 7)$ لأنها كثيرة
 الحدود.
 نعوض طرفي الفترة $[-1, 7]$ بالدالة.

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 4$$

$$= 1 + 6 + 4 = 11$$

$$f(b) = f(7) = (7)^2 - 6(7) + 4$$

$$= 49 - 42 + 4 = 11$$

$$\bar{f}(x) = 2x - 6$$

$$\bar{f}(c) = 2c - 6$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c - 6 = \frac{11 - 11}{7 - (-1)}$$

$$2c - 6 = 0$$

$$[2c = 6] + 2$$

$$c = 3 \in (-1, 7)$$

(1) د - 2015

2019 - د (2) / تطبيقي

2019 - د (3) / تطبيقي

سؤال 1 اختبر إمكانية تطبيق

مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة
 $f(x) = x^3 - x - 1$, $[-1, 2]$ وان
 تحققت جد قيم c الممكنة.

الحل

أولاً، الاستمرارية: الدالة مستمرة على الفترة
 المخلقة $[-1, 2]$ لأنها كثيرة الحدود.
 ثانياً، قابلية الاشتقاق: الدالة قابلة للاشتقاق
 على الفترة المفتوحة $(-1, 2)$ لأنها كثيرة
 الحدود.
 نعوض طرفي الفترة $[-1, 2]$ بالدالة.

$$f(a) = f(-1) = (-1)^3 - (-1) - 1$$

$$= -1 + 1 - 1 = -1$$

$$f(b) = f(2) = (2)^3 - (2) - 1$$

$$= 8 - 2 - 1 = 5$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 1$$

$$\bar{f}(c) = 3c^2 - 1$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$3c^2 - 1 = \frac{5 - (-1)}{2 - (-1)}$$

$$3c^2 - 1 = \frac{6}{3}$$

$$3c^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3c^2 = 2 + 1$$

$$[3c^2 = 3] + 3 \Rightarrow c^2 = 1$$

$$c = \pm 1 \text{ بالجزر}$$

$$c = 1 \in (-1, 2)$$

$$c = -1 \notin (-1, 2)$$

سؤال 3

أختبر إمكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = x^2 - 4x + 5$ $[-1, 5]$ وأن تحققت جد قيم c الممكنة.

الحل

أولاً: الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 5]$ لأنها كثيرة الحدود.
ثانياً: قابلية الاشتقاق، الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 5)$ لأنها كثيرة الحدود.

نحوض طرفي الفترة $[-1, 5]$ بالدالة.
a b

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5$$

$$= 1 + 4 + 5 = 10$$

2016 - د (3) / خارج

$$f(b) = f(5) = (5)^2 - 4(5) + 5$$

$$= 25 - 20 + 5 = 10$$

$$\bar{f}(x) = 2x - 4$$

$$\bar{f}(c) = 2c - 4$$

$$f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c - 4 = \frac{10 - 10}{5 - (-1)}$$

$$2c - 4 = 0$$

$$[2c = 4] \div 2 \Rightarrow c = 2 \in (-1, 5)$$

ما أجملك ! الليل أصبح راحياً يتأملك
كم رؤى ألفت حدودك..
كم ربيعاً غماز لك؟
والبحر يمتد كأنك كوكب
والكون؟.. كل الكون فز ليحملك

ثانياً، الدوال النسبية

* نثبت الاستمرارية وقابلية الاشتقاق للدالة النسبية كما تعلمناها في مبرهنة زول ثم تكمل الباقي الخطوات كما هي.

سؤال 4 هل نطبق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = \frac{4}{x+2}$ $x \in [-1, 2]$ ثم جد قيم c ان تحققت الشروط.

$$f(x) = \frac{4}{x+2}$$

$$f(a) = f(-1) = \frac{4}{-1+2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$f(b) = f(2) = \frac{4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\bar{f}(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{1-4}{2-(-1)}$$

$$\frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{-3}{3}$$

$$-3(c+2)^2 = -12 \quad [\div -3]$$

$$(c+2)^2 = 4 \quad \text{بالجذر}$$

$$c+2 = \pm 2$$

$$\text{أ) } c+2=2 \Rightarrow c=0 \in (-1, 2)$$

$$\text{ب) } c+2=-2 \Rightarrow c=-4 \notin (-1, 2)$$

2019 - تمهيدي / احياني

الحل أولاً، الاستمرارية: $x+2=0$

$$x = -2 \notin [-1, 2]$$

$$f(x) = \frac{4}{x+2}, \quad k \in [-1, 2]$$

$$f(k) = \frac{4}{k+2} \quad \text{الصورة}$$

يمكن الاستغناء عن هذه الخطوات

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{4}{x+2} = \frac{4}{k+2} \quad \text{الغاية}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k) \quad \text{الصورة = الغاية}$$

\therefore الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$

$$\bar{f}(x) = \frac{(x+2)^0(0) - 4(1)}{(x+2)^2} \quad \text{ثانياً،}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$(x+2)^2 = 0 \quad \text{بالجذر}$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \notin (-1, 2)$$

\therefore الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 2)$



ملاحظة

إذا كانت الدالة بشكل جذر دليل فردي

أولاً، الدالة مستمرة لأن مجالها R .

ثانياً، قابلية الاشتقاق:

- (1) نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
- (2) إذا أصبحت الدالة بعد الاشتقاق نسبية (x) بالقيام بأخذ البقام ونساويه للصفر ونجد x
- (3) إذا $x \in (a, b)$ فالدالة غير قابلة للاشتقاق ويتوقف الحل، أما إذا $x \notin (a, b)$ فاذن الدالة قابلة للاشتقاق ونكمل الحل.

سؤال 5 بين هل تنطبق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ على الفترة $[-2, 7]$

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2, 7]$ لأن مجالها R .

ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3} (x+1)^{-\frac{1}{3}} \quad (1)$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$$[3\sqrt[3]{x+1} = 0] \div 3$$

$$\sqrt[3]{x+1} = 0 \quad \text{بالتكعيب}$$

$$x+1=0$$

$$x=-1 \in (-2, 7)$$

غير قابلة للاشتقاق / لا تنطبق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة.

مالأمني فيك احبابي واعدائي
إلا لففلتهم عن عظم بلواني
تركيت للناس دنياهم ودينهم
شغلاً بحيك يا ديني ودنيائي

تحذير هام جداً

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار
مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من
بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على
عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على ط
القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والم
٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات الم
وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق
بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاست
الاتفاق المبرم. وعليه لا نخول شرعاً وهاثوناً است
اللزمة أو أي جزء منها.

لذا يقتضى التنويه

سؤال 6 بين هل تنطبق مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2}$ ثم جد قيم c الممكنة. $[-3, 5]$

الحل

أولاً، الاستمرارية، الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-3, 5]$ لأن مجالها R .

ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$f(x) = (x+3)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} (x+3)^{-\frac{1}{3}} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x+3}}$$

$$[3 \sqrt[3]{x+3} = 0] \div 3$$

$$\sqrt[3]{x+3} = 0 \quad \text{بالتكعيب}$$

$$x+3 = 0$$

$$x = -3 \notin (-3, 5)$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-3, 5)$.

نعوض طرفي الفترة $[-3, 5]$ بالدالة.

$$f(a) = f(-3) = \sqrt[3]{(-3+3)^2} = 0$$

$$f(b) = f(5) = \sqrt[3]{(5+3)^2} = 4$$

$$f'(c) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{c+3}}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{2}{3 \sqrt[3]{c+3}} = \frac{4 - 0}{5 - (-3)}$$

$$\frac{2}{3 \sqrt[3]{c+3}} = \frac{1}{8}$$

$$[3 \sqrt[3]{c+3} = 4] \div 3$$

$$\sqrt[3]{c+3} = \frac{4}{3} \quad \text{بالتكعيب}$$

$$c+3 = \frac{64}{27} \Rightarrow c = \frac{64}{27} - 3$$

$$c = \frac{64 - 81}{27} = \frac{-17}{27}$$

$$\therefore c = \frac{-17}{27} \in (-3, 5)$$

أما القواد فحسبك أنت ساكنة
وطالب البيت أدرك بالدك فيه

سؤال 7 بين هل تنطبق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الدالة $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ ، $x \in [-4, 0]$ وان تحققت جد قيم C .

∴ الدالة قابلة للاشتقاق لانها محتواة كلياً في مجال مشتقة f

$$f(a) = f(-4) = \sqrt{25-16} = 3$$

$$f(b) = f(0) = \sqrt{25-0} = 5$$

$$\bar{f}(c) = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} = \frac{5-3}{0-(-4)}$$

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} \times \frac{1}{2}$$

$$-2c = \sqrt{25-c^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$4c^2 = 25 - c^2$$

$$5c^2 = 25 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore c = +\sqrt{5} \notin (-4, 0)$$

$$c = -\sqrt{5} \in (-4, 0)$$

الحل

$$25 - x^2 \geq 0$$

بالجذر

$$25 \geq x^2$$

أولاً، الاستمرارية،

$$\pm 5 \geq x \quad [-5, 5]$$



$$f(k) = \sqrt{25-k^2}, \quad k \in [-4, 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow k} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-k^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-16} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-0} = 5$$

∴ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-4, 0]$

ثانياً، قابلية الاشتقاق،

$$f(x) = (25-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} (25-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\sqrt{25-x^2} = 0 \quad \text{بالتربيع}$$

$$25 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$\therefore x = \pm 5 \notin (-4, 0)$$

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة
 (التقريب)

خطوات الحل

أولاً: نجد الدالة $f(x)$ وذلك بوضع x مكان المقدار المعقد .

ثانياً: نشتق الدالة $\bar{f}(x)$

ثالثاً: نجد قيم

$b =$ القيمة المعقدة

$a =$ أقرب قيمة منطقية للمقدار المعقد

$$h = b - a$$

$f(a)$ بالدالة

$\bar{f}(a)$ بالاشتقاق

رابعاً: نعوض a

خامساً: نستخدم القانون الآتي: $f(a+h) \simeq f(a) + h \bar{f}(a)$

جدول يوضح كيفية تحديد a, b وتقريب المقدار المعقد

المقدار	b	a
$\sqrt{26}$	26	25
$\sqrt[3]{-9}$	-9	-8
$(2.001)^5$	2.001	2
$(0.99)^{\frac{1}{2}}$	0.99	1
$\sqrt[5]{1.002}$	1.002	1
$\frac{1}{1002}$	1002	1000

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة

سؤال 2

المتوسطة جد تقريباً $\sqrt[3]{7.8}$

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3 x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(x) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$

المشتقة

$b = 7.8$

$a = 8$

$h = b - a \Rightarrow h = 7.8 - 8 \Rightarrow h = -0.2$

$f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$f'(a) = f'(8) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{64}}$

$= \frac{1}{3(4)} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)$

$\simeq 2 + (-0.2 \cdot 0.083)$

$\simeq 2 - 0.0166$

$\simeq 1.9834$

الحل

باستخدام نتيجة مبرهنة

سؤال 1

القيمة المتوسطة جد $\sqrt{26}$

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

الدالة

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2 x^{\frac{1}{2}}}$

$f'(x) = \frac{1}{2 \sqrt{x}}$

المشتقة

$b = 26$

$a = 25$

$h = b - a$

$h = 26 - 25$

$h = 1$

$f(a) = f(25) = \sqrt{25} = 5$

$f'(a) = f'(25) = \frac{1}{2 \sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)$

$\simeq 5 + (1 \cdot 0.1)$

$\simeq 5 + 0.1$

$\simeq 5.1$

الحل

باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

سؤال 4

جد $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

الدالة

الحل

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

المشتقة

$$b = 63, a = 64$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 63 - 64 \Rightarrow h = -1$$

$$f(a) = f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} \\ = 8 + 4 = 12$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(a) = f'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$f'(a) = \frac{3+1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a) \\ \simeq 12 + (-1 \cdot 0.083) \\ \simeq 12 - 0.083 \\ \simeq 11.917$$

جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة المقدار $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

سؤال 5

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

الدالة

الحل

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

المشتقة

$$b = 9$$

$$a = 8$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 9 - 8 \Rightarrow h = 1$$

$$f(a) = f(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f'(a) = f'(8) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(8)^4}} = \frac{-1}{3(2)^4} \\ = \frac{-1}{48} = -0.0208$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a) \\ \simeq 0.5 + (1 \cdot -0.02) \\ \simeq 0.5 - 0.02 \\ \simeq 0.48$$

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة
المتوسطة جد $(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

سؤال 6

الدالة $f(x) = x^3 + 3x^4$

المشتقة $f'(x) = 3x^2 + 12x^3$

$b = 1.04$, $a = 1$

$h = b - a \Rightarrow h = 0.04$

$f(a) = f(1) = (1)^3 + 3(1)^4$
 $= 1 + 3 = 4$

$f'(a) = f'(1) = 3(1)^2 + 12(1)^3$
 $= 3 + 12 = 15$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)$
 $\simeq 4 + (0.04 \cdot 15)$
 $\simeq 4.6$

إشرب عليك وجه الحبيب المقبل
وعلك الفم المتبسّم المتقبل
أكرم بأخو من يليت بجه
لا خير في حب الحبيب الأول

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة
المتوسطة جد $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

سؤال 5

الدالة $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

المشتقة $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$b = 17$, $a = 16$

$h = b - a \Rightarrow h = 17 - 16 \Rightarrow h = 1$

$f(a) = f(16) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16}$
 $= 4 + 2 = 6$

$f'(a) = f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(16)^3}}$
 $= \frac{1}{8} + \frac{1}{4(2)^3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$
 $= \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32} = 0.156$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a)$
 $\simeq 6 + (1 \cdot 0.156)$
 $\simeq 6.156$

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد

سؤال 8

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

الدالة

$$f(x) = x^{-1}$$

تحويل

$$\bar{f}(x) = -1 x^{-2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1}{x^2}$$

المشتقة

$$b = 101, a = 100$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 101 - 100 \Rightarrow h = 1$$

$$f(a) = f(100) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(100) = \frac{-1}{(100)^2} = \frac{-1}{10000} = -0.0001$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &\simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a) \\ &\simeq 0.01 + (1 \cdot -0.0001) \\ &\simeq 0.01 - 0.0001 \\ &\simeq 0.0099 \end{aligned}$$

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد

سؤال 7

$$f(x) = \sqrt[3]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3} + x^4 + 3$$

الدالة

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^4 + 3$$

$$\bar{f}(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{1}{3}} + 4x^3$$

$$\bar{f}(x) = \frac{3}{5 \sqrt[3]{x^2}} + 4x^3$$

المشتقة

$$b = 0.98, a = 1$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 0.98 - 1 \Rightarrow h = -0.02$$

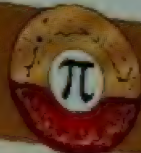
$$\begin{aligned} f(a) &= f(1) = \sqrt[3]{(1)^3} + (1)^4 + 3 \\ &= 1 + 1 + 3 = 5 \end{aligned}$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(1) = \frac{3}{5 \sqrt[3]{(1)^2}} + 4(1)^3$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{4}{1}$$

$$= \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &\simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a) \\ &\simeq 5 + (-0.02 \cdot 4.6) \\ &\simeq 5 - 0.092 \\ &\simeq 4.908 \end{aligned}$$



* في حالة وجود قيمة تحت جذر بشكل $0.\square\square\square$ نسوي المراتب لدليل الجذر بوضع اصفار (0) على اليمين.

عدد المراتب بعد الجذر ← مثلاً: $\sqrt[3]{0.12}$ ← ثلاث مراتب = دليل الجذر

عدد المراتب قبل الجذر = دليل الجذر

عدد المراتب قبل الجذر ← مثلاً: $\sqrt[5]{0.30000}$ ← خمس مراتب = دليل الجذر

سؤال 10 باستخدام نتيجة مبرهنة القبية

المتوسطة جد $\sqrt{\frac{1}{2}}$

الدليل = المراتب → $\sqrt[3]{0.50}$

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

المشتقة

$b = 0.50$

$a = 0.49$

$h = b - a \Rightarrow h = 0.50 - 0.49$

$h = 0.01$

$f(a) = f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$\bar{f}(a) = \bar{f}(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}}$

$= \frac{1}{2(0.7)} = \frac{10}{14}$

$= \frac{5}{7} = 0.714$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$

$\simeq 0.7 + (0.01 \cdot 0.714)$

$\simeq 0.7 + 0.00714$

$\simeq 0.70714$

سؤال 9 باستخدام نتيجة مبرهنة القبية

المتوسطة جد $\sqrt[3]{0.12}$

الدليل = المراتب → $\sqrt[3]{0.120}$

الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$b = 0.120$, $a = 0.125$

$h = b - a \Rightarrow h = 0.120 - 0.125$

$h = -0.005$

$f(a) = f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

$\bar{f}(a) = \bar{f}(0.125) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0.125)^2}}$

$= \frac{1}{3(0.5)^2} = \frac{1}{3(0.25)} = \frac{1}{0.75}$

$= \frac{100}{75} = \frac{4}{3} = 1.333$

$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$

$\simeq 0.5 + (-0.005 \cdot 1.333)$

$\simeq 0.49335$

الأشكال الهندسية في مبرهنة القيمة المتوسطة

القسم الثاني

يطلب الحجم / يطلب المساحة

أولاً: نكتب قانون الحجم أو المساحة بحسب الشكل والمعطيات.
ثانياً: يصبح هذا القانون دالة إذا كان يحوي متغير واحد فقط مثل قانون حجم المكعب أو حجم الكرة أو مساحة الدائرة أو مساحة المربع ويمكنك مراجعة الأسئلة (2 ، 3 ، 4) ثم تكمل باقي خطوات التقريب.

ملاحظة

إذا كان قانون الحجم أو المساحة يحوي مجهولين (متغيرين) نجد علاقة بينهما أو يعطي أحدهما ليصبح القانون بهتغير واحد ويكون دالة (راجع السؤال 5).

القسم الأول

يعطي الحجم / يعطي المساحة

يطلب أحد الأبعاد
نصف القطر r
ارتفاع h
طول x

الخطوات،

أولاً: نستخدم قانون الحجم أو المساحة بحسب الشكل والمعطيات

ثانياً: نعوض الحجم أو المساحة في القانون.

ثالثاً: نقوم بترتيب المعادلة بعد التعويض ثم نستخدم التقريب.

يمكن التاياني
الآتيح :- $\sqrt{\frac{1}{2}}$ بالصغ

$$1 // \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$2 // \sqrt{(2)^{-1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$3 // (\sqrt{2})^{-1} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}$$

سؤال
10

المُسند في الرياضيات

سؤال 2 مربع مساحته 48 cm^2 جد طول ضلعه بصورة تقريبية مستخدماً نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

$$A = L^2$$

$$48 = L^2 \Rightarrow L = \sqrt{48} \quad (\text{تقريب})$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$b = 48$$

$$a = 49$$

$$h = b - a$$

$$h = -1$$

$$f(a) = f(49) = \sqrt{49} = 7$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(49) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14} = 0.071$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$$

$$\simeq 7 + (-1 \cdot 0.071)$$

$$\simeq 7 - 0.071$$

$$\simeq 6.929 \text{ cm}$$

سؤال 1 كرة حجمها $84\pi \text{ cm}^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية مستخدماً نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\left[84\pi = \frac{4}{3} \pi r^3 \right] \cdot 3$$

$$\left[84 \cdot 3 = 4 r^3 \right] \div 4 \Rightarrow r^3 = \frac{84 \cdot 3}{4}$$

$$r^3 = 63 \quad \text{بالجذر التكعيبي}$$

$$r = \sqrt[3]{63} \quad \text{تقريب}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{الدالة}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{البشتقة}$$

$$b = 63, \quad a = 64$$

$$h = b - a$$

$$h = -1$$

$$f(a) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}$$

$$= \frac{1}{3(4)^2} = \frac{1}{48} = 0.020$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot \bar{f}(a)$$

$$\simeq 4 + (-1 \cdot 0.020)$$

$$\simeq 4 - 0.02$$

$$\simeq 3.98 \text{ cm}$$

سؤال 4 كرة نصف قطرها 3.001 cm **جد**
حجمها بصورة تقريبية مستخدماً
نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{دالة}$$

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{V}(r) = 4 \pi r^2 \quad \text{المشتقة}$$

$$b = 3.001$$

$$a = 3$$

$$h = b - a \Rightarrow h = 0.001$$

$$\begin{aligned} V(a) &= V(3) = \frac{4}{3} \pi (3)^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (27) = 36 \pi \end{aligned}$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(3) = 4 \pi (3)^2 = 36 \pi$$

$$\begin{aligned} V(a+h) &\approx V(a) + h \cdot \bar{V}(a) \\ &\approx 36 \pi + (0.001 \cdot 36 \pi) \\ &\approx 36 \pi + 0.036 \pi \\ &\approx 36.036 \pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

سؤال 3 مكعب طول حرفه 9.98 cm **جد**
حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة
مبرهنة القيمة المتوسطة.

$$V = x^3$$

$$V(x) = x^3 \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{V}(x) = 3x^2 \quad \text{المشتقة}$$

$$b = 9.98$$

$$a = 10, \quad h = b - a$$

$$h = -0.02$$

$$V(a) = V(10) = (10)^3 = 1000$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(10) = 3(10)^2 = 300$$

$$\begin{aligned} V(a+h) &\approx V(a) + h \cdot \bar{V}(a) \\ &\approx 1000 + (-0.02 \cdot 300) \\ &\approx 1000 - 6 \\ &\approx 994 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

لك اكتفيت فلم أعبأ بما انشغلوا
سيان بعدك من جاؤا ومن غابوا
أنت المسافر في قلبي وأوددت
والكل بعدك في عيني أغراب

$$b = 2.98$$

$$a = 3$$

$$h = b - a$$

$$h = -0.02$$

$$V(a) = V(3) = \frac{\pi}{12} (3)^3$$

$$= \frac{\pi}{12} (27) = 2.25 \pi$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(3) = \frac{\pi}{4} (3)^2 = 2.25 \pi$$

$$V(a+h) \cong V(a) + h \cdot \bar{V}(a)$$

$$\cong 2.25 \pi + (-0.02 \cdot 2.25 \pi)$$

$$\cong 2.25 - 0.0450 \pi$$

$$\cong 2.205 \pi \text{ cm}^3$$

سؤال 5 مخروط قائم ارتفاعه يساوي قطر

قاعدته فإذا كان ارتفاعه 2.98 cm جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

1 د / 2017

ارتفاعه يساوي طول قطره قاعدته

$$[2r = h] \div 2$$

من المعطى h نخلص من r

$$r = \frac{h}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{h^2}{4} \cdot h$$

$$V = \frac{\pi}{12} h^3$$

$$V(h) = \frac{\pi}{12} h^3$$

الدالة

$$\bar{V}(h) = \frac{\pi}{4} h^2$$

المشتقة

التغير التقريبي للدالة

* لكي نعرف ان السؤال يخص التغير التقريبي يجب ان تكون لدينا دلائل، إذا كان لدينا مثلاً كرة معدنية واثينا لكي نطليها والطلاء فيه سمك فهل ان حجم الكرة سيبقى على وضعه الاصلي ام انه سيتغير؟ نعم سيتغير ولكن التغير طفيف جداً لان الطلاء سمكه قليل جداً إذن نصف القطر للكرة سوف يتغير تغيراً بسيطاً جداً هذا التغير فيسمى بـ (التغير التقريبي).

بالكرة والدائرة نزيد
من جانب واحد
بالعرج والمثلث نزيد
من جانبيت

$$\text{التغير التقريبي} \cong h \cdot \bar{f}(a)$$

* آخر قيمة التي استقر عليها الشكل الهندسي سواء كان بعد الطلاء أو بعد أي تغيير هو قيمة b وتكون دائماً قيمة معقدة. التغير بحدوث الحشاش

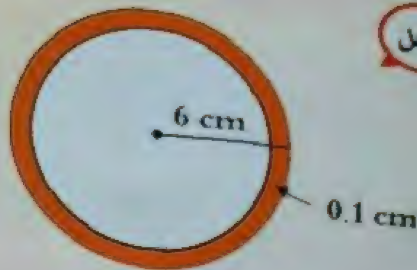
في مسائل الطلاء شتتعمل
قانون الحجم دائماً

تطبيقات التفاضل

الأحيائي
التطبيقي

2 ج

سؤال 2 كرة نصف قطرها 6 cm ظليت بطلاء سميكة 0.1 cm جد كمية الطلاء بصورة تقريبية.



الحل

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

1 د / 2014

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{V}(r) = 4 \pi r^2 \quad \text{المشتقة}$$

$$b = 6.1$$

$$a = 6$$

$$h = b - a$$

$$h = 0.1$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(6) = 4 \pi (6)^2$$

$$= 144 \pi$$

$$\text{حجم الطلاء} \cong h \cdot \bar{V}(a)$$

$$\cong 0.1 \cdot 144 \pi$$

$$\cong 14.4 \pi \text{ cm}^3$$

كمية
الطلاء =

حجم الطلاء

سؤال 1 لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغير x من 8 إلى 8.06 جد مقدار التغير التقريبي.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$$

$$b = 8.06$$

$$a = 8$$

$$h = b - a$$

$$h = 0.06$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(8) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{8}}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333$$

$$\text{التغير التقريبي} \cong h \cdot \bar{f}(a)$$

$$\cong 0.06 \cdot 0.333$$

$$\cong 0.01998$$

إذا تغيرت x من 32 إلى 32.06 جد مقدار التغير التقريبي للدالة

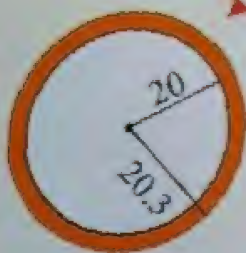
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

2017 / 2 د / أحيائي

جد مساحة حلقة دائرية نصف قطرها الداخلي 20 cm ونصف قطرها الخارجي 20.3 cm باستخدام التفاضلات.

سؤال 4
2017

الحل



$$A = \pi r^2$$

$$f(r) = \pi r^2$$

الدالة

$$\bar{f}(r) = 2\pi r$$

المشتقة

$$b = 20.3$$

$$a = 20$$

$$h = b - a$$

$$h = 0.3$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(20) = 2\pi(20) = 40\pi$$

$$\text{مساحة الحلقة} \cong h \cdot \bar{f}(a)$$

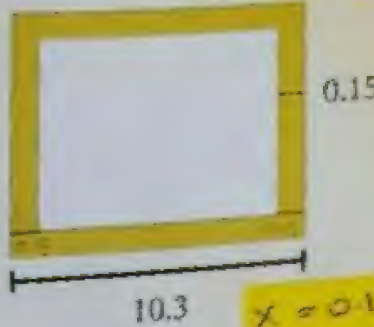
$$\cong 0.3 * 40\pi$$

$$\cong 12\pi \text{ cm}^2$$

براد طلاء مكعب طول ضلعه 10 cm فإذا كان سبك الطلاء 0.15 cm جد حجم الطلاء بصورة تقريبية.

سؤال 3

الحل



$$V = x^3$$

$$V(x) = x^3$$

الدالة

$$\bar{V}(x) = 3x^2$$

المشتقة

$$b = 10.3$$

$$a = 10$$

$$h = b - a$$

$$h = 0.3$$

$$\bar{V}(a) = \bar{V}(10) = 3(10)^2 = 300$$

$$\text{حجم الطلاء} \cong h \cdot \bar{V}(a)$$

$$\cong 0.3 * 300$$

$$\cong 90 \text{ cm}^3$$

$$x = 0.15 + 0.15 + 10 = 0.30 + 10 = 10.30 \approx 10.3$$

أسئلة متفرقة

أولاً: إذا كانت أحد عناصر الفترة مجهولاً والدالة تحقق شروط القيمة المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

1. نعوض a, b بالدالة لنجد $f(a), f(b)$
2. نشتق الدالة ونعوض بدل x بـ c ثم نعوض في $f(c)$ ونجد $\bar{f}(c)$
3. نعوض كل من $f(a), f(b), \bar{f}(c)$ بالقانون $\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

سؤال 1 إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x$ وكانت $f: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ ونحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = 5$ جد قيمة n

$$8 = \frac{n^2 - 2n - (0)}{n - 0}$$

$$8 = \frac{n(n-2)}{n} \Rightarrow 8 = n - 2$$

$$8 + 2 = n$$

$$n = 10$$

3 د / 2017

$$f(x) = x^2 - 2x, [0, n]$$

$$f(a) = f(0) = (0)^2 - 2(0) = 0$$

$$f(b) = f(n) = n^2 - 2n$$

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$\bar{f}(x) = 2x - 2$$

$$\bar{f}(c) = 2c - 2$$

$$\bar{f}(5) = 2(5) - 2 = 8$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ثانياً: إذا أعطى الدالة مباشرة بشكل $f(x)$ تبدأ بخطوة الاشتقاق مباشرة وب نفس باقي خطوات موضوع التقريب .

سؤال 3 إذا كانت $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 + 6x + 4$$

$$b = 1.001, a = 1, h = 0.001$$

$$f(a) = f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) + 5 = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$$

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(1) = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 3 + 6 + 4 = 13$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &\cong f(a) + h \cdot \bar{f}(a) \\ &\cong 13 + (0.001 \cdot 13) \\ &\cong 13 + 0.013 \\ &\cong 13.013 \end{aligned}$$

سؤال 2 إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ وكانت $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ جد قيمة b

2014 / تمهيدي 2016 / 1 د 2017 / تمهيدي

$$f(x) = x^3 - 4x^2$$

$$f(a) = f(0) = (0)^3 - 4(0)^2 = 0$$

$$f(b) = b^3 - 4b^2$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 8x$$

$$\bar{f}(c) = 3c^2 - 8c$$

$$\bar{f}\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{12}{9} - \frac{16}{3} = \frac{12 - 48}{9} = \frac{-36}{9} = -4$$

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$-4 = \frac{(b^3 - 4b^2) - (0)}{b - 0}$$

$$-4 = \frac{b(b^2 - 4b)}{b} \Rightarrow -4 = b^2 - 4b$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0 \Rightarrow (b - 2)(b - 2) = 0$$

$$b = 2$$

سروط الفرض

$$(a, b)$$

$$[a, b]$$

$$a \neq b \text{ (X)}$$

$$a < b \text{ (X)}$$

$$a > b \text{ (X)}$$

إذا كانت $f(x) = 4 - 2x - x^2$ جد نقاط النهايات التي وجدت لها حدد مناطق التزايد والتناقص

سؤال 2

$$f(x) = 4 - 2x - x^2$$

الحل

$$f'(x) = -2 - 2x \quad \text{الفحص}$$

$$-2 - 2x = 0 \Rightarrow [-2 = 2x] \div 2$$

$$x = -1$$



$$f(x) = 4 - 2x - x^2$$

$$f(-1) = 4 - 2(-1) - (-1)^2$$

$$f(-1) = 4 + 2 - 1 = 5$$

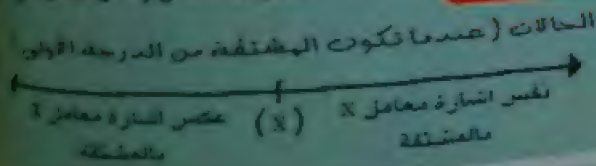
نقطة نهاية عظمى محلية $(-1, 5)$

$$\{x : x < -1\} \quad \text{مناطق التزايد}$$

$$\{x : x > -1\} \quad \text{مناطق التناقص}$$

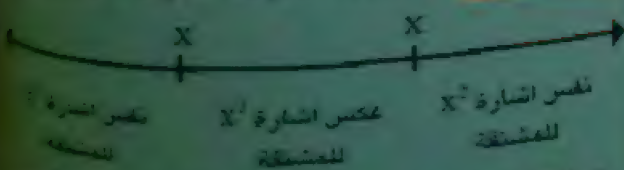
ملاحظة

ملاحظة نحن الفحص ولكن ليس من



ملاحظة

عندما تكون لدينا قيمتين



∴ الأطراف نفس الإشارة لـ x^2 والمشتقة عكس الإشارة لـ x^2 .

إذا كانت $f(x) = x^2$ جد نقاط النهايات التي وجدت لها حدد مناطق التزايد والتناقص

سؤال 1

الحل

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x \quad \text{الفحص}$$

$$[2x = 0] \div 2 \Rightarrow x = 0$$



$$f(x) = x^2$$

$$f(0) = (0)^2 = 0$$

نقطة نهاية صغرى محلية $(0, 0)$

$$\{x : x > 0\} \quad \text{مناطق التزايد}$$

$$\{x : x < 0\} \quad \text{مناطق التناقص}$$

$$f(1) = 2(1) = 2 \quad \text{أكثر من (0)}$$

$$f(-1) = 2(-1) = -2 \quad \text{أصغر من (0) غير مطلوبة}$$

بعد التعويض وأخذ الإشارة ووضعها على خط الأعداد.

تطبيقات التفاضل

إذا كانت $f(x) = 1 - (x-2)^2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

سؤال 4

الحل

$$f(x) = 1 - (x-2)^2$$

$$\bar{f}(x) = 0 - 2(x-2) \quad (1)$$

$$\bar{f}(x) = -2(x-2) \quad \text{الفحص}$$

$$[-2(x-2) = 0] \div -2 \Rightarrow x-2 = 0$$

$$x = 2$$



$$f(x) = 1 - (x-2)^2$$

$$f(2) = 1 - (2-2)^2$$

$$f(2) = 1 = 0$$

(2, 1) نقطة نهاية عظمى محلية

مناطق التزايد: $\{x : x < 2\}$

مناطق التناقص: $\{x : x > 2\}$

$$\bar{f}(x) = -2(x-2)$$

$$\bar{f}(3) = -2(3-2) = -2 \quad \text{أكبر من (2)}$$

$$\bar{f}(1) = -2(1-2) = +2 \quad \text{أصغر من (2)}$$

غير مطلوبة وزارياً لنهايات الفحص فقط

إذا كانت $f(x) = 1 + (x-2)^2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

سؤال 3

الحل

$$f(x) = 1 + (x-2)^2$$

$$\bar{f}(x) = 0 + 2(x-2) \quad (1)$$

مطلوبة بالجزء الأول

$$\bar{f}(x) = 2(x-2) \quad \text{الفحص}$$

$$[2(x-2) = 0] \div 2 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$



$$f(x) = 1 + (x-2)^2$$

$$f(2) = 1 + (2-2)^2$$

$$= 1 + 0 = 1$$

(2, 1) نقطة نهاية صغرى محلية

مناطق التزايد: $\{x : x > 2\}$

مناطق التناقص: $\{x : x < 2\}$

$$\bar{f}(x) = 2(x-2)$$

$$\bar{f}(3) = 2(3-2) = 2 \quad \text{أكبر من (2)}$$

$$\bar{f}(1) = 2(1-2) = -2 \quad \text{أصغر من (2)}$$

غير مطلوبة وزارياً لنهايات صحة الفحص فقط

سؤال 6 إذا كانت $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ حدد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

$$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 9 + 6x - 3x^2 \quad \text{الفحص}$$

$$[9 + 6x - 3x^2 = 0] \div 3$$

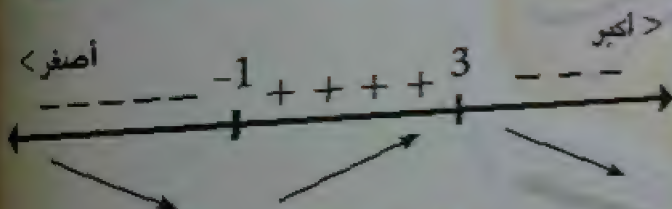
$$3 + 2x - x^2 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{يجب أن تكون} \\ \text{لذلك نضربها} \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{تجربة}$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$\text{أما } x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$\text{أو } x+1=0 \Rightarrow x=-1$$



$$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$$

$$f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3$$

$$= 27 + 27 - 27$$

$$= 27$$

نقطة نهاية عظمى محلية (3, 27)

$$f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3$$

$$= -9 + 3 + 1 = -5$$

نقطة نهاية صغرى محلية (-1, -5)

مناطق التزايد في الفترة المفتوحة (-1, 3)

$$\{x : x < -1\} \quad \text{مناطق التناقص}$$

$$\{x : x > 3\}$$

سؤال 3 إذا كانت $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ حدد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \quad \text{الفحص}$$

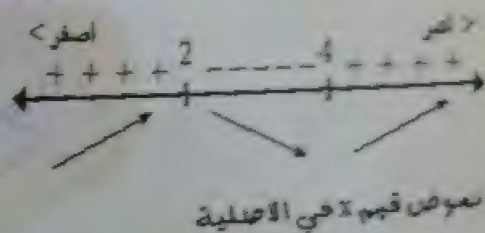
$$[3x^2 - 18x + 24 = 0] \div 3$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \text{تجربة}$$

$$(x-4)(x-2) = 0$$

$$\text{أما } x-4=0 \Rightarrow x=4$$

$$\text{أو } x-2=0 \Rightarrow x=2$$



$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

$$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2)$$

$$= 8 - 36 + 48$$

$$= 20$$

نقطة نهاية عظمى محلية (2, 20)

$$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4)$$

$$= 64 - 144 + 96 = 16$$

نقطة نهاية صغرى محلية (4, 16)

مناطق التزايد

$$\{x : x > 4\}$$

$$\{x : x < 2\}$$

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة (2, 4)

إذا كانت $f(x) = x^4 - 2x^2$ جد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

سؤال 7

الحل

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

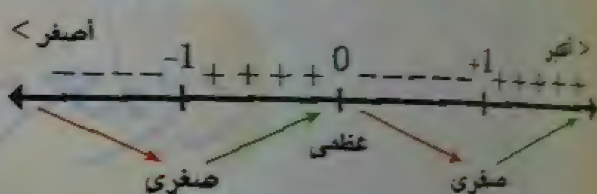
$$[4x^3 - 4x = 0] \div 4$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 = 1 - 2 = -1$$

نقطة نهاية صغرى محلية $(-1, -1)$

$$f(0) = (0)^4 - 2(0)^2 = 0 - 0 = 0$$

نقطة نهاية عظمى محلية $(0, 0)$

$$f(1) = (1)^4 - 2(1)^2 = 1 - 2 = -1$$

نقطة نهاية صغرى محلية $(1, -1)$

مناطق التزايد $\{x : x > 1\}$

وفي الفترة المفتوحة $(-1, 0)$

مناطق التناقص $\{x : x < -1\}$

وفي الفترة المفتوحة $(0, 1)$

إذا كانت $f(x) = 1 - x^5$ حدد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

سؤال 9

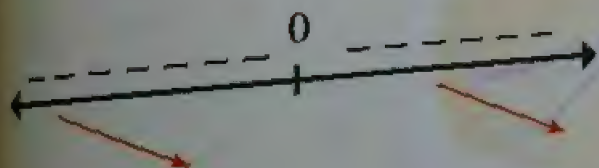
$$f(x) = 1 - x^5$$

$$f'(x) = -5x^4 \quad \text{الفحص}$$

$$[-5x^4 = 0] \div -5$$

$$x^4 = 0 \quad \text{بالجذر الرابع}$$

$$x = 0$$



∴ لا توجد نهايات لأن الدالة متناقصة دائماً

$$f(0) = 1 - (0)^5 = 1$$

$$(0, 1) \quad \text{حرجة}$$

$$\{x : x > 0\} \quad \text{مناطق التناقص}$$

$$\{x : x < 0\}$$

إذا كانت $f(x) = x^3 + 2$ حدد نقاط النهايات إن وجدت ثم حدد مناطق التزايد والتناقص.

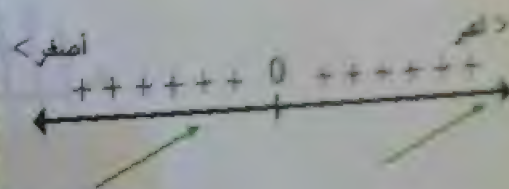
سؤال 8

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad \text{الفحص}$$

$$[3x^2 = 0] \div 3$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{بالتجذر}$$



∴ لا توجد نهايات لأن الدالة متزايدة دائماً

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f(0) = (0)^3 + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$(0, 2) \quad \text{حرجة}$$

$$\{x : x > 0\} \quad \text{مناطق التزايد}$$

$$\{x : x < 0\}$$

مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب

خطوات الحل

- 1 نشتق الدالة مرتين $\bar{f}(x)$
- 2 نساوي المشتقة الثانية للصفر $\bar{f}(x) = 0$ ونجد x .
- 3 نفحص القيم على خط الاعداد.
- 4 نعوض x في الدالة الأصلية لنجد نقاط الانقلاب.

++++ تقعر

----- تحدب

$-x^2$

$+x^2$

* كل دالة من الدرجة الثانية اما مقعرة أو محدبة ولا يوجد فيها انقلاب.

أمثلة توضيحية

$f(x) = x^2 + 2x$	$\Rightarrow +x^2$	الدالة مقعرة دائماً	U
$f(x) = 5x - x^2$	$\Rightarrow -x^2$	الدالة محدبة دائماً	∩
$f(x) = 3 - x - x^2$	$\Rightarrow -x^2$	الدالة محدبة دائماً	∩
$f(x) = 3 + 5x + x^2$	$\Rightarrow +x^2$	الدالة مقعرة دائماً	U

أعلى أسس هو (2)

سؤال 2 جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = 4x^3 - x^4$

الحل

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$$

$$f''(x) = 24x - 12x^2 \quad \text{الفحص}$$

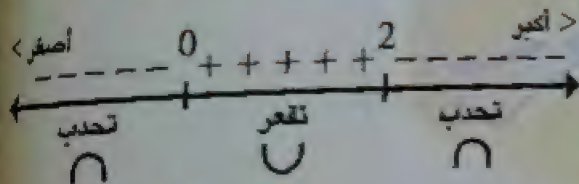
$$[24x - 12x^2 = 0] \div 12$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 0$$

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$



$$f(x) = 4x^3 - x^4$$

$$f(0) = 4(0)^3 - (0)^4$$

$$= 0 - 0 = 0$$

نقطة انقلاب (0, 0)

$$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4$$

$$= 32 - 16 = 16$$

نقطة انقلاب (2, 16)

مناطق التحدب $\{x: x > 2\}$

$\{x: x < 0\}$

مناطق التفرع في الفترة المفتوحة (0, 2)

سؤال 1 جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x^3 - 3x$

الحل

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x \quad \text{الفحص}$$

$$[6x = 0] \div 6$$

$$x = 0$$



$$f(0) = (0)^3 - 3(0)$$

$$= 0 - 0 = 0$$

نقطة انقلاب (0, 0)

مناطق التفرع $\{x: x > 0\}$

مناطق التحدب $\{x: x < 0\}$

$$f''(1) = 6(1) = +6$$

$$f''(-1) = 6(-1) = -6$$

غير مطلوبة للتوضيح فقط

جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x^2$.

$$\bar{f}(x) = 2x$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 2, 2 \neq 0$$

\therefore لا يوجد انقلاب، الدالة مقعرة دائماً.

جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$.

$$\bar{f}(x) = 4x^3 + 6x$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 12x^2 + 6$$

$$12x^2 + 6 \neq 0 \text{ مجموع مربعين}$$

مقعرة دائماً

جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = x^4 + x^2$.

$$\bar{f}(x) = 4x^3 + 2x$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 12x^2 + 2$$

$$12x^2 + 2 \neq 0 \text{ مجموع مربعين}$$

دائماً $(+)$ الدالة مقعرة دائماً

ملاحظة إذا كان لدينا $x^2 + \text{رقم} \neq 0$ فتكون مقعرة دائماً وإذا كانت: $\text{رقم} + x^2$ فتكون متزايدة دائماً

سؤال 4

الحل

جد مناطق التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

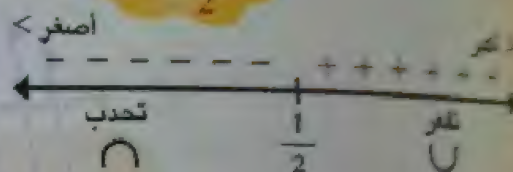
$$\bar{f}(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 12x - 6$$

$$12x - 6 = 0$$

$$[12x = 6] + 12$$

$$x = \frac{1}{2}$$



$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 6 + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{24}{4} + \frac{4}{4}$$

$$= \frac{1 - 3 - 24 + 4}{4} = \frac{-22}{4} = -\frac{11}{2}$$

نقطة انقلاب $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$

$$\left\{x: x > \frac{1}{2}\right\} \text{ مناطق التفرع}$$

$$\left\{x: x < \frac{1}{2}\right\} \text{ مناطق التحدب}$$

المستند في الرياضيات

سؤال 8

جد مناطق التفعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - x^{-2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

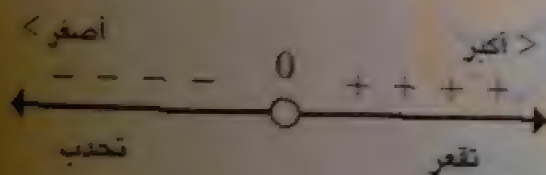
$$f'(x) = 0 + 2x^{-3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{2}{x^3} \neq \frac{0}{1}$$

$$2 \neq 0$$

* نأخذ القيمة التي نجعل

$$x = 0 \text{ المقام = صفر}$$



{x: x > 0} مناطق التقعر

{x: x < 0} مناطق التحدب

* لا نعوض في مثل هذه الحالة لأن x=0

لجعل المقام = صفر

ما همّي الأخطاء والإعراب
وإذا رفعت "الحال" قلت: صواب!

سؤال 7

جد مناطق التفعر والتحدب ونقاط الانقلاب إن وجدت للدالة

$$f(x) = 4 - (x+2)^4$$

$$f'(x) = 0 - 4(x+2)^3 \quad (1)$$

$$f'(x) = -12(x+2)^2 \quad (1)$$

حتى ان تم بقلب لا يؤثر لأن (1) عنصر
معاد في عملية الضرب

$$f'(x) = -12(x+2)^2 \quad \text{الفحص}$$

$$[-12(x+2)^2 = 0] \div -12$$

$$(x+2)^2 = 0 \quad \text{بالحدز}$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$



الدالة محدبة دائماً

$$\{x: x > -2\}$$

$$\{x: x < -2\}$$

أنت الوحيد إن سمعت حديثه
أخطأت لكن لا أدقق في الهوى

اختبار المشتقة الثانية لنقاط النهايات العظمى والصغرى

$$F(x) - \bar{F}(x) - \bar{\bar{F}}(x)$$

\Downarrow \Downarrow \Downarrow
 y x نهاية

خطوات الحل

- (1) نشق الدالة مشتقة أولى
- (2) نساوي المشتقة الأولى للصفر ونجد قيم x .
- (3) نشق الدالة مشتقة ثانية.
- (4) نعوض قيم x بالمشتقة الثانية:

• عندما نعوض قيم x بالمشتقة الثانية سيكون لدينا ثلاثة احتمالات:

ناتج التعويض 0 بفشل
الاختبار فنكمل الحل
بالمشتقة الأولى

ناتج التعويض $-$
فالنهاية عظمى محلية

ناتج التعويض $+$
فالنهاية صغرى محلية

- (5) نعوض x بالدالة الاصلية لنجد نقاط النهايات.

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء الملمزة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتأكد وأحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون رقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

المستند في الرياضيات

سؤال 1 باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن أمكن، حدد النهايات المحلية للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$[3x^2 - 6x - 9 = 0] \div 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{تجربة}$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

أما $x-3=0 \Rightarrow x=3$

أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$$f''(x) = 6x - 6$$

نعوض قيم x بالمشتقة الثانية:

$$f''(3) = 6(3) - 6$$

$$= 18 - 6 = 12 \quad x=3 \text{ صغرى عند}$$

$$f''(-1) = 6(-1) - 6$$

$$= -6 - 6 = -12 \quad x=-1 \text{ عظمى عند}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3)$$

$$= 27 - 27 - 27 = -27$$

(3, -27) نقطة نهاية صغرى محلية

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)$$

$$= -1 - 3 + 9 = 5$$

(-1, 5) نقطة نهاية عظمى محلية

سؤال 2 باستخدام اختبار المشتقة

الثانية إن أمكن، حدد النهايات المحلية للدالة

$$f(x) = 3x - x^3$$

الحل

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

$$3 - 3x^2 = 0$$

$$[3 = 3x^2] \div 3$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f''(x) = -6x$$

نعوض قيم x بالمشتقة الثانية:

$$f''(1) = -6(1) = -6 \quad x=1 \text{ عظمى عند}$$

$$f''(-1) = -6(-1) = +6 \quad x=-1 \text{ صغرى عند}$$

نعوض قيم x بالدالة الأصلية

$$f(x) = 3x - x^3$$

$$f(1) = 3(1) - (1)^3$$

$$= 3 - 1 = 2$$

(1, 2) نقطة نهاية عظمى محلية

$$f(-1) = 3(-1) - (-1)^3$$

$$= -3 + 1 = -2$$

(-1, -2) نقطة نهاية صغرى محلية

التشديد في الرياضيات

سؤال 3 باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدالة $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

الحل

$$f'(x) = 6 - 6x$$

$$6 - 6x = 0$$

$$[6 = 6x] \div 6 \Rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = -6$$

نعوض قيم x بالمشتقة الثانية:

$$f''(1) = -6 \text{ عظمى}$$

نعوض قيم x بالدالة الأصلية

$$f(1) = 6(1) - 3(1)^2 - 1$$

$$= 6 - 3 - 1 = 2$$

(1, 2) نقطة نهاية عظمى محلية



سؤال 4 باستخدام اختبار المشتقة الثانية إن أمكن جد النهايات المحلية للدالة $f(x) = 4 - (x+1)^4$

الحل

$$f'(x) = 0 - 4(x+1)^3 \quad (1)$$

فحص

$$[-4(x+1)^3 = 0] \div -4$$

$$(x+1)^3 = 0 \text{ بالجزر التكعيبي}$$

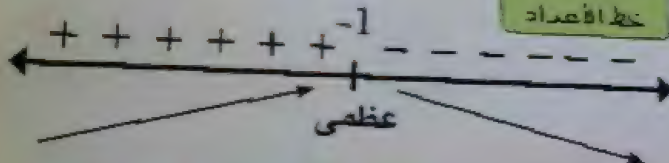
$$x+1=0 \Rightarrow x = -1$$

$$f''(x) = -12(x+1)^2 \quad (1)$$

$$f''(-1) = -12(-1+1)^2$$

$$= 0 \rightarrow \text{يفشل}$$

نقش على خط الأعداد



$$f(-1) = 4 - (-1+1)^4$$

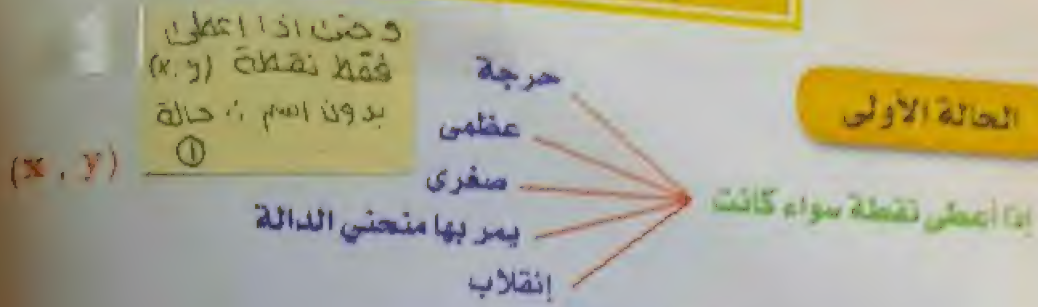
$$= 4$$

(-1, 4) نقطة نهاية عظمى محلية

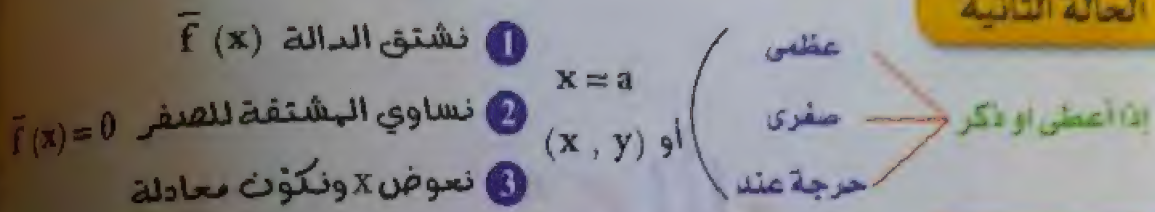
مناطق التزايد $\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص $\{x : x > -1\}$

إيجاد قيم الثوابت



نعوض بالدالة مباشرة دون تفكير $f(x) = y$



الحالة الثالثة
إذا أعطى أو ذكر إنقلاب عند $x = a$ أو (x, y)

- ① نشتق الدالة مرتين $\bar{\bar{f}}(x)$
- ② نساوي المشتقة الثانية للصفر $\bar{\bar{f}}(x) = 0$
- ③ نعوض x ونكوّن معادلة.

الحالة الرابعة
عندما يعطى نهاية () عدد بدون x يمثل هذا الرقم (y)

لا نبدأ بالحالة الرابعة
تلك الحالة الرابعة
تأتي آخر المطاف

خطوات الحل

- ① نشتق الدالة $\bar{f}(x)$
- ② نساوي المشتقة للصفر $\bar{f}'(x) = 0$
- ③ نجد x ونفحص على خط الأعداد
- ④ نختار من خط الأعداد القيمة المناسبة

- ⑤ إذا ذكر عظمى نختار x التي عندها عظمى وإذا ذكر صغرى نختار x التي عندها x صغرى
- ⑥ بعد ذلك نختار قيمة x المناسبة يصبح لدينا زوج مرتب ونرجع إلى الحالة الأولى

الاحيائي
التطبيقي

2

تطبيقات التفاضل

التماس: 1 مستقيم يمس منحنى ميل المنحني = ميل المستقيم

الحالة الخامسة

$$m = - \left(\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} \right)$$

$$\text{ميل المنحني} \quad \bar{f}(x) = \bar{y}$$

تنبيه علمي

يتساوى ميل المنحنيين $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$ فقط عند قيمة x المعطاة في السؤال وليس عند جميع قيم x .

2 منحنى يمس منحنى متماسان

$$\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$$

ملاحظات

- 1 ميل التماس = $\bar{f}(x) = \bar{y}$ ميل المنحني
- 2 عدد المعادلات = عدد المجاهيل = عدد الحالات
- 3 عدد المعلومات = عدد المجاهيل = عدد الحالات
- 4 إذا ذكر عبارة بين نوع النقطة الحرجة معناها المطلوب
ونطبق خطوات النهايات العظمى والصغرى
- 5 عبارة المنحني مقعر ومحدب ويعطي التحذب والتقعير بالشكل التالي:

$$\{x : x > a\} \quad \{x : x < a\}$$

معناها انقلاب عند $x = a$ ونطبق الحالة الثالثة

6 إذا طلب معادلة التماس نحتاج الى ميل ونقطة (x_1, y_1)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\text{ميل} = \bar{f}(x)$$

7 نقطة تنتمي لمحور السينات معناها $y = 0$

8 نقطة تنتمي لمحور الصادات معناها $x = 0$

سؤال 1 إذا كانت $(2, 6)$ نقطة حرجية لمنحني الدالة $f(x) = a - (x - b)^4$ فبما $a, b \in \mathbb{R}$ وبين نوع النقطة الحرجة.

2011 / خارج القطر

حالة أولى

$$\begin{cases} f(x) = a - (x - b)^4 \\ 6 = a - (2 - b)^4 \end{cases} \quad \text{..... 1}$$

الحل

نقطة حرجية
لأن $f'(x) = 0$
في $x = 2$
و $f''(2) < 0$

$$\bar{f}(x) = 0 - 4(x - b)^3 \quad (1)$$

$$[-4(x - b)^3 = 0] \div -4$$

بالجذر التكعيبي $(x - b)^3 = 0$

$$x - b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \text{من السؤال}$$

$$2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$6 = a - (2 - b)^4 \quad \text{..... 1}$$

$$6 = a - (2 - 2)^4 \Rightarrow a = 6$$

نعوض بالدالة الأصلية $f(x) = a - (x - b)^4$

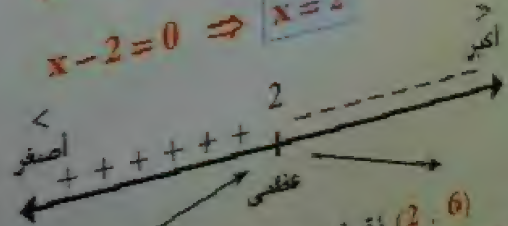
الدالة بدون مجاهيل $f(x) = 6 - (x - 2)^4$

$$\bar{f}(x) = -4(x - 2)^3 \quad \text{الفحص}$$

$$[-4(x - 2)^3 = 0] \div -4$$

بالجذر التكعيبي $(x - 2)^3 = 0$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$



نقطة نهاية عظمى محلية



إذا الدنا حل معناه
تحتوي مجهولين
نضع المجهول بجوهر
والآخر قائم بجوهر
 $a, b, c = 1, 2, \dots$

فإذا
واذا

تطبيقات التفاضل

الخطوة الأولى
تحديد النهاية
التي نبحث عنها



عبر قيمة الثابتين $a, b \in \mathbb{R}$ لكي يكون لمنحنى الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى عند $x = -1$ ونهاية صغرى عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب.

$$y = x^3 + ax^2 + bx$$

$$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

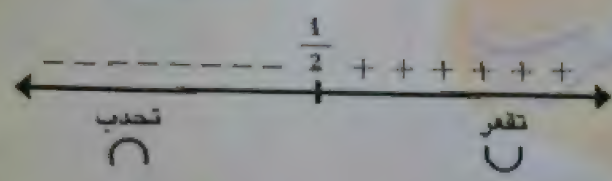
$$\bar{y} = 3x^2 - \frac{3}{2}(2)x - 6$$

$$\bar{y} = 3x^2 - 3x - 6$$

$$\bar{y} = 6x - 3 \quad \text{الفحص}$$

$$6x - 3 = 0 \Rightarrow [6x = 3] + 6$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$



$$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{1}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{1} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$= \frac{1 - 3 - 24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$$

$$\text{نقطة انقلاب } \left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$$

لا يكون في قيم x القريبة
لأنه إيجاد الانقلاب بشكل
جديد وهو ان ليس له
عوضه بالمثل الأول
وله حلول مختلفة

- 1 دور / 2013
- 2 دور / 2013
- خارج القطار / 2008
- 3 دور / 2015
- خارج القطار / 2016

$$y = x^3 + ax^2 + bx$$

نهاية عظمى عند $x = -1$

$$\bar{y} = 3x^2 + 2ax + b$$

$$3x^2 + 2ax + b = 0$$

$$3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0$$

$$-2a + b = -3 \quad \text{①}$$

نهاية صغرى عند $x = 2$

$$\bar{y} = 3x^2 + 2ax + b$$

$$3(2)^2 + 2a(2) + b = 0$$

$$4a + b = -12 \quad \text{②}$$

$$-2a + b = -3 \quad \text{①}$$

$$\text{بالطرح } 4a + b = -12 \quad \text{②}$$

$$[-6a = +9] + -6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

جواب في ①

$$-2a + b = -3 \quad \text{①}$$

$$-2\left(-\frac{3}{2}\right) + b = -3$$

$$3 + b = -3$$

$$b = -3 - 3 \Rightarrow b = -6$$

المستند في الرياضيات

سؤال 3 إذا كانت المنحني $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ ممعر $\{x: x < 1\}$ ومحدب $\{x: x > 1\}$ وبيس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $(3, 1)$ جد قيم $a, b, c \in \mathbb{R}$

لحل المعادلات المتشابهة
«بالحذف»

بحل المعادلتين 2 و 3

$$9a + 2b = -3 \quad \dots\dots 3$$

$$6a + 2b = 0 \quad \dots\dots 2$$

$$3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

نعوض في 2

$$6a + 2b = 0$$

$$6(-1) + 2b = 0 \Rightarrow -6 + 2b = 0$$

$$[2b = 6] \div 2 \Rightarrow b = 3 \quad 1$$

لحل المعادلات
المختلفة
«بالتعويض»

$$27a + 9b + c = 1$$

$$27(-1) + 9(3) + c = 1$$

$$-27 + 27 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

2017 / دور 1

معادلات متشابهة
(لها نفس الجاهيل)
معادلات مختلفة
(لها نفس الجاهيل)
معادلات مختلفة
(لها نفس الجاهيل)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \quad (3, 1)$$

$$1 = a(3)^3 + b(3)^2 + c$$

$$27a + 9b + c = 1 \quad \dots\dots 1$$

انقلاب عند $x = 1$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f'(x) = 6ax + 2b$$

$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad \dots\dots 2$$

ميل المنحني = ميل المستقيم

$$m = -\left(\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}\right) = -\left(\frac{9}{1}\right)$$

$$m = -9 \quad \text{مستقيم}$$

$$f'(x) = \text{ميل المنحني}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$-9 = 3ax^2 + 2bx$$

$$-9 = 3a(3)^2 + 2b(3)$$

$$[27a + 6b = -9] \div 3$$

$$9a + 2b = -3 \quad \dots\dots 3$$

تطبيقات التفاضل
الأحيائي
التطبيقي

المستقيم $3x - y = 7$ مماس للمنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2, -1)$ ؟

وكذلك له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيم $a, b \in \mathbb{R}$ وما نوع النهاية ؟

1 ا / 2016

خ / 2015

3 ا / 2014

2 ا / 2013

$$a + b = 0 \quad \dots\dots 3$$

$$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$4a + 2b + c = -1 \quad \dots\dots 1$$

$$4(1) + 2(-1) + c = -1$$

$$4 - 2 + c = -1 \Rightarrow 2 + c = -1$$

$$c = -1 - 2 \Rightarrow c = -3$$

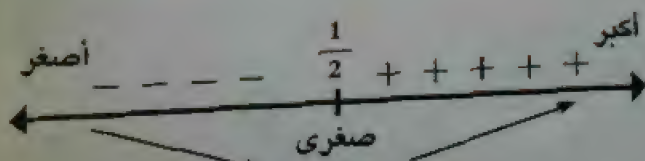
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^2 - x - 3$$

$$\bar{y} = 2x - 1 \quad \text{الفحص}$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow [2x = 1] + 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3$$

$$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3$$

$$y = \frac{1 - 2 - 12}{4} = \frac{-13}{4}$$

نقطة نهاية صغرى محلية $\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$

النقطة $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{-1}\right)$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$-1 = a(2)^2 + b(2) + c$$

$$4a + 2b + c = -1 \quad \dots\dots 1$$

ميل المنحني = ميل المستقيم

$$\text{ميل المستقيم} = -\left(\frac{\text{مائل}}{\text{مائل}}\right) = -\left(\frac{2}{1}\right)$$

$$\Rightarrow \text{مستقيم } m = 3$$

$$\text{ميل المنحني} \Rightarrow \bar{y} = 2ax + b$$

$$2ax + b = 3$$

$$2a(2) + b = 3 \Rightarrow 4a + b = 3 \quad \dots\dots 2$$

نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$

$$\bar{y} = 2ax + b$$

$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0$$

$$a + b = 0 \quad \dots\dots 3$$

$$4a + b = 3 \quad \dots\dots 1$$

$$-3a = -3 \Rightarrow a = 1$$

نعوض في 3

بالطرح

سؤال 5 إذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $\forall x > 1$ وسنبدية $\forall x < 1$ وللدالة نقطة نهاية عظمى محلية $(-1, 5)$ فجد قيم $a, b, c \in \mathbb{R}$

$a = 1$

$3a + b = 0$

يعوض $a = 1$ في 3

$3(1) + b = 0 \Rightarrow 3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$

نعوض في 1

$-a + b - c = 5$

$-(1) + (-3) - c = 5$

$-1 - 3 - 5 = c$

$c = -9$

2015/1

2012/3

2015/خ

2017/ت

الحل

النقطة $(-1, 5)$ y

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$

$-a + b - c = 5$ 1

نهاية عظمى $(-1, 5) \Leftrightarrow x = -1$

$\bar{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$3ax^2 + 2bx + c = 0$

$3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$

$3a - 2b + c = 0$ 2

انقلاب عند $x = 1$

$\bar{f} = 6ax + 2b$

$[6ax + 2b = 0] + 2$

$3a + b = 0$ 3

$-a + b - c = 5$

$3a - 2b + c = 0$

$2a - b = 5$ 4

$3a + b = 0$ 3

$[5a = 5] \div 5$

بالجمع

بالجمع

نعوض:
(x, y) بالمتغيرين
(x, y) بالمتغيرين
(x, y) بالمتغيرين
(x, y) بالمتغيرين
في معادلة المستقيم
ثم معادلة التوازي

المعادلة التي نحوي
(x, y) بالمتغيرين
عستقيم

سؤال 6 إذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ و $g(x) = 1 - 12x$ وكانت كل من f, g متباينات عند نقطة انقلاب f وهي $(1, -11)$ جد قيم الثوابت $a, b, c \in \mathbb{R}$

$2 = x$
نقطة انقلاب
ومتساوية

$$a + b + c = -11 \quad \text{..... 1}$$

بالطرح

$$3a + 2b + c = \pm 12 \quad \text{..... 2}$$

$$-2a - b = 1 \quad \text{..... 4}$$

$$3a + b = 0 \quad \text{..... 2} \quad \text{بالجمع}$$

$$a = 1$$

نعويض في معادلة 2

$$3(1) + b = 0$$

$$3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$a + b + c = -11 \quad \text{1} \quad \text{نعويض في}$$

$$1 - 3 + c = -11 \Rightarrow -2 + c = -11$$

$$c = -9$$

$$f(x) = y$$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = 0$$

2 د / 2014

تمديد 2017

1 د / 2017

y

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad \text{..... 1}$$

$$-11 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1)$$

$$a + b + c = -11 \quad \text{..... 1}$$

$$\bar{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\bar{f}(x) = 6ax + 2b$$

انقلاب عند

$$x = 1$$

$$[6ax + 2b = 0] + 2$$

$$3a + b = 0 \quad \text{..... 2}$$

ميل المنحني f = ميل المنحني g

$$\bar{g}(x) = \bar{f}(x)$$

$$g(x) = 1 - 12x \Rightarrow \bar{g}(x) = -12$$

$$\bar{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$$

$$3ax^2 + 2bx + c = -12$$

$$3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12$$

$$3a + 2b + c = -12 \quad \text{..... 3}$$

سؤال 7 إذا كانت للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند $x=1$ جد $a, c \in \mathbb{R}$

الحل

$$\begin{aligned} y \\ f(x) &= -x^3 + 3x^2 + c \\ 8 &= -(2)^3 + 3(2)^2 + c \\ 8 &= -8 + 12 + c \\ 8 &= 4 + c \\ c &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + 3x^2 + c \\ f'(x) &= 3ax^2 + 6x \\ f''(x) &= 6ax + 6 \end{aligned}$$

الانعطاف عند $x=1$

$$6ax + 6 = 0 \Rightarrow 6a(1) + 6 = 0$$

$$[6a = -6] + 6 \Rightarrow a = -1$$

نعويض الأصلية $f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

الفضص

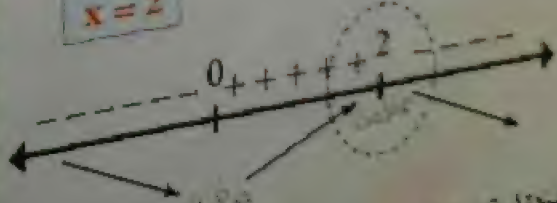
$$[-3x^2 + 6x = 0] + 3$$

$$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x+2) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{أو } -x + 2 = 0$$

$$x = 2$$



نختار قيمة النهاية العظمى ($y = 8, x = 2$)

$$(2, 8)$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار الغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهننا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ٢٠٠٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق وتذكّر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها. لذا اقتضى التنويه والتحذير

تطبيقات التفاضل
الأحيائي
التطبيقي

إذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ عند قيمة c فمجد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه.

3 د / 2016

2012 / خارج

الحل

الفصل $\bar{f}(x) = 6x - 3x^2$

$$[6x - 3x^2 = 0] + 3$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

أما $x = 0$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$



$$x = 0, y = 6$$

$$(0, 6)$$

$$f(x) = 3x^2 - x^3 + c$$

$$6 = 3(0)^2 - (0)^3 + c$$

$$c = 6$$

في هذه الحالة يوجد نقطة انقلاب وهي (0, 6) فمجد معادلة المماس في هذه النقطة

$$f(x) = 3x^2 - x^3 + 6$$

$$\bar{f}(x) = 6x - 3x^2$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 6 - 6x$$

$$6 - 6x = 0 \Rightarrow [6x = 6] + 6$$

$$x = 1$$



$$f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6$$

$$= 3 - 1 + 6 = 8$$

$$(1, 8)$$

$$m = \bar{f}(x)$$

$$\bar{f}(1) = 6(1) - 3(1)^2$$

$$= 6 - 3 = 3 \Rightarrow m = 3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 8 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 8 = 3x - 3$$

$$3x - y - 3 + 8 = 0$$

$$3x - y + 5 = 0$$

معادلة المماس

$$ax + by + c = 0$$

سؤال 10 لنكن $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ برهن ان الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

15/2013

الحل

تعديل $f(x) = x^2 - ax^{-1}$

$f'(x) = 2x + ax^{-2}$

$f'(x) = 2x + \frac{a}{x^2}$

$\left[2x + \frac{a}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$

$2x^3 + a = 0 \Rightarrow [2x^3 = -a] + 2$

بالجذر التكعيبي $x^3 = \frac{-a}{2}$

$x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

$f'(x) = 2x + ax^{-2}$

$f'(x) = 2 - 2ax^{-3}$

$f'(x) = 2 - \frac{2a}{x^3}$

$f'\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right) = 2 - \frac{2a}{\frac{-a}{2}}$

$= 2 + 2a\left(\frac{2}{a}\right)$

$= 2 + 4 = +6$

$f'\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right) > 0$

∴ الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية
تتملك نهاية صغرى

سؤال 9 لنكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث $a \in \{-4, 8\}$ جد قيمة a إذا كانت:

1) الدالة محدبة $-x^2 \rightarrow -\infty$

2) الدالة مقعرة $+x^2 \rightarrow +\infty$

الحل

$f'(x) = 2ax - 6$

$f''(x) = 2a$

$2a < 0$

1) محدبة $a = -4$

$2a > 0$

2) مقعرة $a = 8$

في مجموعة x عان
يسا هذا الدالة
تتملك نهاية
لنكن
دفع ان الدالة
تتملك نهاية
بهاية
فئة مقعرة
واغار من عني اذا كان a
واحدة جا
ملا الحاة
اختار مقعرة

مثال 11/ لنكن $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ أوجد قيمة a على أن الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x=1$ ثم بين هل للدالة نهاية عظمى محلية. **حل** 3. اختيار مشتقة

1 د / 2008

حل

$$\left[2x + \frac{1}{x^2} = 0 \right] * x^2$$

$$2x^3 + 1 = 0$$

$$[2x^3 = -1] \div 2$$

$$x^3 = \frac{-1}{2} \quad \text{بالجذر التكعيبي}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$$

$$\bar{f}(x) = 2 + \frac{2a}{x^3}$$

$$\bar{f}(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$

$$\bar{f}\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\frac{-1}{2}}$$

$$= 2 + 4 = 6 > 0$$

∴ للدالة نهاية صغرى محلية

لا تمتلك نهاية عظمى محلية

* من الممكن استخدام خط الأعداد لمعرفة نوع النهاية ولكن تم حل السؤال باختبار المشتقة الثانية.

$$f(x) = x^2 + ax^{-1} \quad \text{تعديل}$$

$$\bar{f}(x) = 2x - ax^{-2}$$

$$\bar{f}(x) = 2 + 2ax^{-3}$$

$$\bar{f}(x) = 2 + \frac{2a}{x^3} \quad \text{بمشتقة الثانية}$$

$$2 + \frac{2a}{x^3} = 0, \quad x=1 \quad \text{مرافق}$$

$$2 + \frac{2a}{(1)^3} = 0$$

$$2 + 2a = 0$$

$$2a = -2$$

$$a = -1 \quad \text{بموضع بالأصلية}$$

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 - x^{-1}$$

$$\bar{f}(x) = 2x + x^{-2}$$

$$\bar{f}(x) = 2x + \frac{1}{x^3}$$

أولاً، الدوال كثيرات الحدود

خطوات الحل

أولاً، أوسع مجال x -

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور،

1 مع محور السينات $y=0$ ونستخرج قيمة x

2 مع محور الصادات $x=0$ ونستخرج قيمة y

ثالثاً، التناظر

رابعاً، المعاديات (لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية)

خامساً، النهايات العظمى والصغرى.

سادساً، نقاط الانقلاب ومناطق التفرع والتحدب.

سابعاً، الجدول والرسم.

التناظر:

أولاً، التناظر حول محور الصادات وتحدث إذا كان لدينا،

$$f(x) = f(-x)$$

1 نعوض $(-x)$ بالدالة ويكون الناتج يشبه الأصلية [هذه الخطوة عملية]

2 إذا كانت الدالة ذات أسس زوجية فقط [هذه الخطوة للتأكيد فقط (لا تكتب)].

1 $f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 \rightarrow$ تشبه الأصل

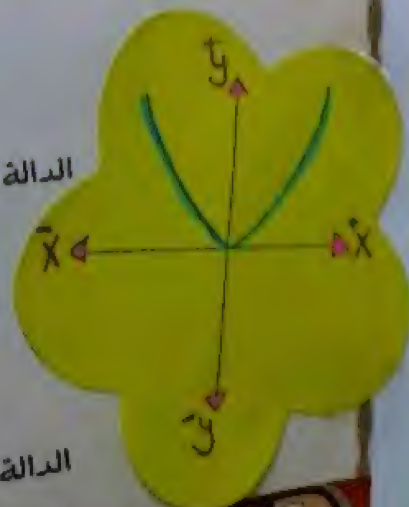
$f(x) = f(-x)$ الدالة متناظرة حول محور الصادات.

2 $f(x) = x^4 - 2x^2$

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2$

$f(-x) = x^4 - 2x^2 \rightarrow$ تشبه الأصل

$f(x) = f(-x)$ الدالة متناظرة حول محور الصادات.



الاحيائي
التطبيقي

2

تطبيقات التفاضل

ثانياً، التناظر حول نقطة الأصل وتحدث إذا كان لدينا،

$$f(-x) = -f(x)$$

- 1) نعوض $(-x)$ بالدالة وبعدها نسحب السالب عامل مشترك فيكون الناتج بعد العامل يساوي الأصلية [الخطوة العملية].
- 2) الدالة ذات أسس فردية فقط [هذه الخطوة للتأكد فقط (لا تكتب)].

1) $f(x) = x^3$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$$

الدالة بدوت السالب
نضبطه الأصلية

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{الدالة متناظرة حول نقطة الأصل}$$

2) $f(x) = x^3 - 3x$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 3(-x) \\ &= -x^3 + 3x \\ &= -(x^3 - 3x) \end{aligned}$$

الدالة بدوت السالب
نضبطه الأصلية

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{الدالة متناظرة حول نقطة الأصل}$$



ملاحظة

إذا اختلفت الشروط المكتوبات باللون الأحمر فلا يوجد تناظر.

إذا كان هناك أسس
زوجية + فردية =
لا يوجد تناظر

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

ملاحظة

عند سحب $(-)$ عامل مشترك نعكس إشارة كل حدود الدالة.

خامساً، النهايات العظمى والصغرى

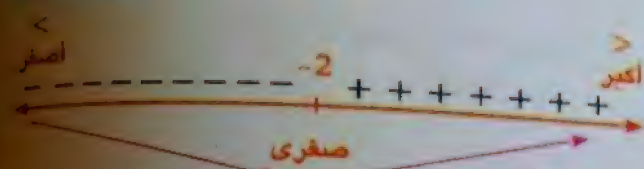
$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

الفحص

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow [2x = -4] + 2$$

$$x = -2$$



$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3$$

$$= 4 - 8 + 3 = -1$$

نقطة نهاية صغرى محلية.

مناطق التناقص: $\{x: x < -2\}$

مناطق التزايد: $\{x: x > -2\}$

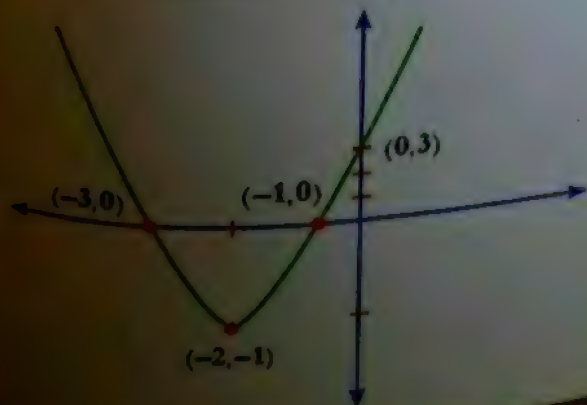
$$f''(x) = 2$$

$$2 \neq 0$$

لا يوجد انقلاب / الدالة مقعرة دائماً.

سابعاً، الجدول والرسم

x	y	(x,y)
-3	0	(-3,0)
-1	0	(-1,0)
0	3	(0,3)
-2	-1	(-2,-1)



ارسم منحنى الدالة

سؤال 1

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

1/2002 د 1

أولاً، أوسع مجال الدالة هو \mathbb{R} .

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين:

$$y = 0 \quad \text{مع محور السينات}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3, (-3, 0)$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1, (-1, 0)$$

$$x=0 \quad \text{مع محور الصادات:}$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f(0) = (0)^2 + 4(0) + 3 = 3, (0, 3)$$

ثالثاً، التناظر:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 3$$

$$= x^2 - 4x + 3$$

$$= -(x^2 - 4x - 3)$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

∴ لا يوجد تناظر

أيضاً، لا يوجد معادلات لأن الدالة ليست نسبية.

الاحتمالي
التطبيقي

$$f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1$$

حرجة (1, 1)

$$\{x : x > 1\}$$

مناطق التناقص

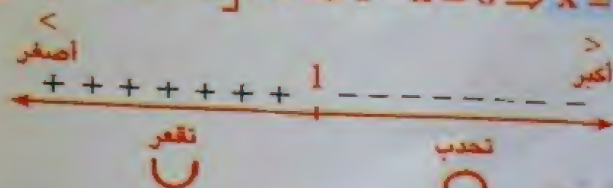
$$\{x : x < 1\}$$

سادساً، الانقلاب

$$\bar{f}(x) = -6(1-x)(-1)$$

$$\bar{f}(x) = 6(1-x) \quad \text{الفحص}$$

$$[6(1-x)=0] + 6 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$



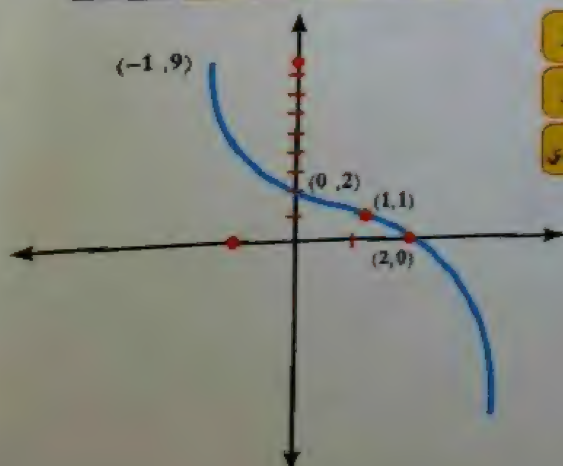
$$f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1 \Rightarrow (1, 1) \text{ نقطة انقلاب}$$

$$\{x : x > 1\}, \{x : x < 1\}$$

مناطق التقعر مناطق التحدب

سابعاً، الجدول والرسم

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)
1	1	(1, 1)
-1	9	(-1, 9)



2 د / 2011

3 د / 2013

2016 / تمهيد

ارسم منحنى الدالة

$$f(x) = (1-x)^3 + 1$$

دولاً، أوسع مجال للدالة هو $-R$

تسابعاً، نقاط التقاطع مع المحورين

$$y=0 \quad \text{مع محور السينات}$$

$$(1-x)^3 + 1 = 0$$

$$(1-x)^3 = -1$$

$$1-x = -1 \Rightarrow 1+1 = x \Rightarrow x=2$$

(2, 0)

$$x=0 \quad \text{مع محور الصادات}$$

$$f(0) = (1-0)^3 + 1$$

$$= 1+1 = 2, (0, 2)$$

ثامناً، التناظر

$$f(x) = (1-x)^3 + 1$$

$$f(-x) = (1+x)^3 + 1 = -[-(1+x^3)-1]$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

لذلك، المتطابقات لا يوجد لأن الدالة ليست فسيبية.

لذلك، النهايات العظمى والصغرى.

$$f(x) = (1-x)^3 + 1$$

$$\bar{f}(x) = 3(1-x)^2(-1)+0$$

$$\bar{f}(x) = -3(1-x)^2 \quad \text{الفحص}$$

$$[-3(1-x)^2=0] + -3$$

$$(1-x)^2 = 0 \quad \text{بالجذر التربيعي}$$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$



التحليلي

التطبيقي

تطبيقات التفاضل

لا توجد نهايات / الدالة متزايدة دائماً في مجالها .

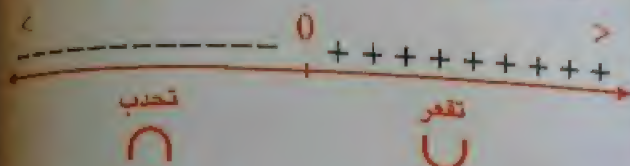
حرجة $f(0) = (0)^5 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

مناطق التزايد $\{x : x < 0\}$, $\{x : x > 0\}$

سادساً، الانقلاب

الفحص $f(x) = 20x^3$

$[20x^3 = 0] \div 20 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$



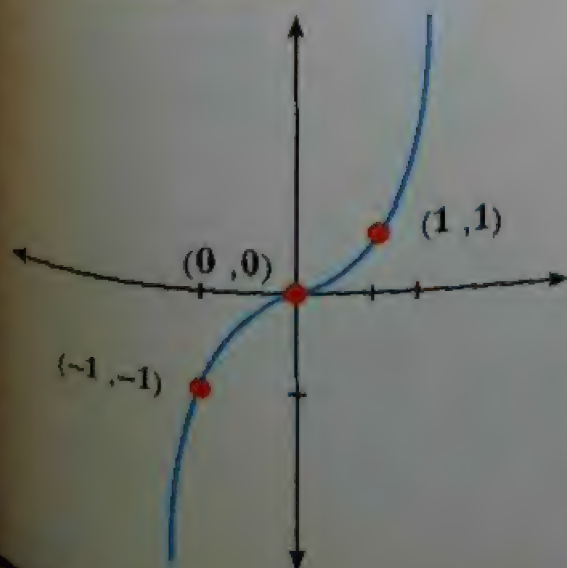
نقطة انقلاب $f(0) = (0)^5 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$\{x : x > 0\}$, $\{x : x < 0\}$

مناطق التحدب مناطق التقعر

سابعاً، الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
-1	-1	(-1, -1)
2	32	(2, 32)



سؤال 3 ارسم منحنى الدالة $f(x) = x^3$

الحل

أولاً، توسع مجال للدالة هو \mathbb{R} .

ثانياً، تقاطع التقاطع مع المحورين

مع محور السينات $y = 0$

بالبذر الخامس $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(0, 0)$

مع محور الصادات $x = 0$

$f(0) = (0)^3 \Rightarrow (0, 0)$

ثالثاً، التناظر:

$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

$= -(x^3)$ (نفيه الأصل)

∴ متناظرة حول نقطة الأصل لأن:

$f(-x) = -f(x)$

رابعاً، المتطابقات لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية.

خامساً، النهايات المقسمة والصغرى:

$f(x) = x^5$

الفحص $f(x) = 5x^4$

$[5x^4 = 0] \div 5$

$\Rightarrow x^4 = 0$ بالبذر الرابع

$x = 0$



1د / 2000

2د / 2000

ت / 2008

ع / 2007

1د / 2013

ت / 2014

2014 / للارحين

$$f(x) = 10 - 3x - x^2$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 10 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$= \frac{40 + 18 - 9}{4} = \frac{49}{4} = 12 \frac{1}{4}$$

$$\left(-1 \frac{1}{2}, 12 \frac{1}{4}\right) \quad \text{نقطة نهاية عظمى محلية}$$

$$\left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\}, \left\{x : x > -\frac{3}{2}\right\}$$

مناطق التزايد

مناطق التناقص

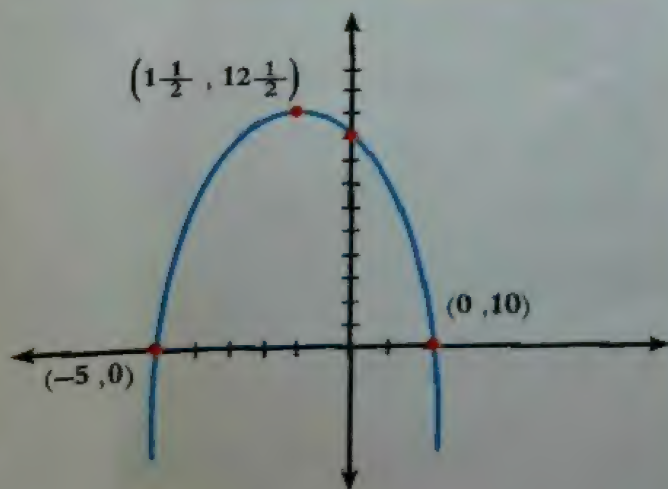
سادساً، الانقلاب

$$f''(x) = -2, \quad -2 \neq 0$$

لا يوجد انقلاب الدالة محدبة دائماً.

سابعاً، الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
-5	0	(-5, 0)
2	0	(2, 0)
0	10	(0, 10)
$-1 \frac{1}{2}$	$12 \frac{1}{4}$	$(-1 \frac{1}{2}, 12 \frac{1}{4})$



$$f(x) = 10 - 3x - x^2 \quad \text{الرسم منحنى الدالة}$$

أولاً، أوسع مجال للدالة هو \mathbb{R} .

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاورين

$$y = 0$$

$$10 - 3x - x^2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad (\text{تجربة})$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$\text{أما } x+5=0 \Rightarrow x=-5, \quad (-5, 0)$$

$$\text{أو } x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2, 0)$$

مع محور الصادات $x=0$

$$f(0) = 10 - 3(0) - (0)^2 = 10, \quad (0, 10)$$

ثالثاً، التناظر:

$$f(x) = 10 - 3x - x^2$$

$$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2$$

$$= 10 + 3x - x^2$$

$$= -(-10 - 3x + x^2)$$

$$f(x) \neq f(-x) \quad \text{لا يوجد تناظر أفقي}$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

رابعاً، المتطابقات لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية.

خامساً، النهايات العظمى والصغرى:

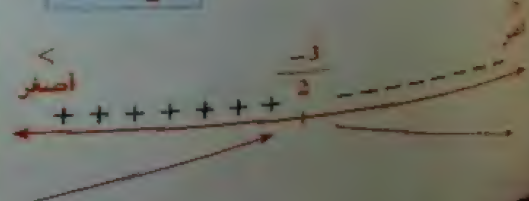
$$f(x) = 10 - 3x - x^2$$

2013/ت

$$f'(x) = -3 - 2x$$

$$-3 - 2x = 0 \Rightarrow [-3 = 2x] + 2$$

$$x = \frac{-3}{2}$$



خامساً النهايات العظمى والصغرى

$$f(x) = 2x^2 - x^4$$

$$f'(x) = 4x - 4x^3$$

الفحص

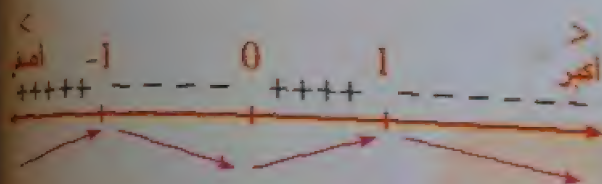
$$[4x - 4x^3 = 0] \div 4$$

$$x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{بالجذر } 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$



$$f(x) = 2x^2 - x^4$$

$$f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0$$

نقطة نهاية صغرى محلية (0, 0)

$$f(1) = 2(1)^2 - (1)^4 = 2 - 1 = 1$$

نقطة نهاية عظمى محلية (1, 1)

$$f(-1) = 2(-1)^2 - (-1)^4 = 2 - 1 = 1$$

نقطة نهاية عظمى محلية (-1, 1)

$$\{x : x < -1\}$$

مناطق تزايد:

$$(0, 1)$$

وفي الفترة المفتوحة

$$\{x : x > 1\}$$

مناطق التناقص:

$$(-1, 0)$$

وفي الفترة المفتوحة

سؤال 5 ارسم منحنى الدالة $f(x) = 2x^2 - x^4$

أولاً، أوسع مجال للدالة هو \mathbb{R} .
ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين

الحل

$$y = 0$$

مع محور السينات

$$2x^2 - x^4 = 0$$

$$x^2(2 - x^2) = 0$$

$$\text{أما } x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, (0, 0)$$

$$\text{بالجذر } 2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$$

$$x = 0$$

مع محور الصادات

$$f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

ثالثاً، التناظر:

$$f(x) = 2x^2 - x^4$$

ذات اksen زوجية

$$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4$$

نفسه الاصلية

∴ الدالة متناظرة حول محور الصادات لأن:

$$f(x) = f(-x)$$

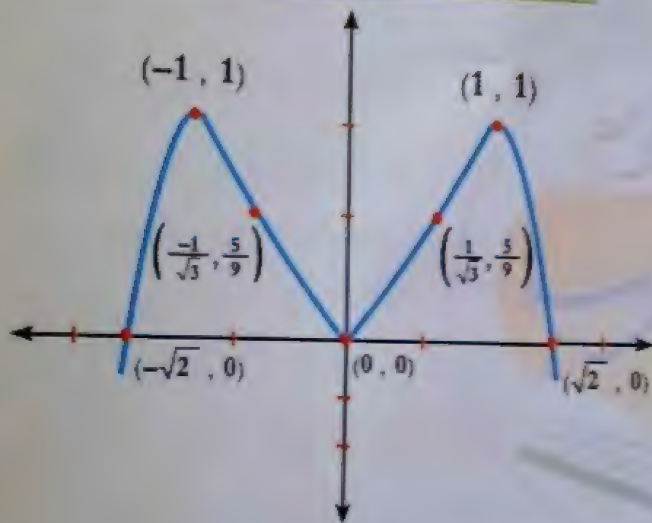
لذلك، المعادلات لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية.

الأحيائي
التطبيقي

تطبيقات التفاضل

سابقاً، الجدول والمخطط

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\sqrt{2}$	0	$(\sqrt{2}, 0)$
$-\sqrt{2}$	0	$(-\sqrt{2}, 0)$
1	1	(1, 1)
-1	1	(-1, 1)
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{9}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{9}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$



ان كنت فيه قد اكتفيت بنظرة
وانا الذي في الحسن لا لا اكتفي
ماذا اقول وكيف ارق بالكلام
لوصف وجه في الجمال كيوسف

نقاط التحول ونقاط الانقلاب

$$f(x) = 4 - 12x^2$$

$$[4 - 12x^2 = 0] + 4$$

$$1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow [1 = 3x^2] + 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$$

نقاط الانقلاب

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left\{x: x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x: x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

مناطق التحول

23/2012

تحيي

23/2018 تطبيق غارت القطر

موسم

تطبيقات التفاضل

باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = 6x - x^3$

سؤال 6

الحل

أولاً، أوسع مجال للدالة R

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور

مع محور السينات $y = 0$

$$6x - x^3 = 0 \Rightarrow x(6 - x^2) = 0$$

$$\text{أما } x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$\text{أو } 6 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 6$$

$$x = \pm \sqrt{6} \Rightarrow (\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$$

مع محور الصادات $x = 0$

$$f(0) = 6(0) - (0)^3 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

ثالثاً، التناظر

$$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3$$

$$= -6x + x^3$$

$$= -(6x - x^3)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

رابعاً، المعاديات

لا توجد معاديات لأن الدالة ليست نسبية

خامساً، النهايات العظمى والصغرى

$$f'(x) = 6 - 3x^2$$

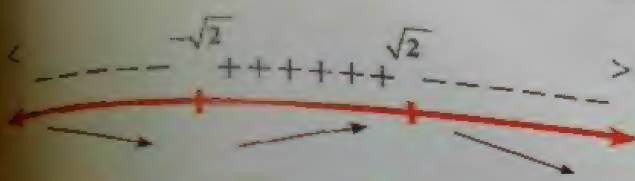
$$6 - 3x^2 = 0 \Rightarrow [3x^2 = 6] \div 3$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow \text{بالجذر } x = \pm \sqrt{2}$$

2

التطبيقات
الاحتمالية

تطبيقات التفاضل



$$f(\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^3$$

$$= 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

نقطة نهاية عظمى محلية $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

$$f(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3$$

$$= -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

نقطة نهاية صغرى محلية $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

$$\{x: x < -\sqrt{2}\}$$

مناطق التناقص

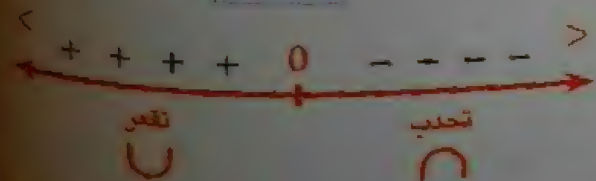
$$\{x: x > \sqrt{2}\}$$

مناطق التزايد في الفترة المفتوحة $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سادساً، التقعر والتحبب ونقاط الانقلاب

$$f'(x) = -6x$$

$$-6x = 0 \Rightarrow x = 0$$



نقطة انقلاب $(0, 0)$ ، $f(0) = 6(0) - (0)^3 = 0$

$$\{x: x > 0\}$$

مناطق التحبب

$$\{x: x < 0\}$$

مناطق التقعر

ثالثا، التناظر:

$$f(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 1)$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad \text{تبسيط الدالة}$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2$$

$$= -x^3 + 3x + 2$$

$$= -(x^3 - 3x - 2)$$

$$f(x) \neq f(-x) \quad \text{لا يوجد تناظر}$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

رابعا، المعاديات:

لا توجد لأن الدالة ليست نسبية

خامسا، النهايات العظمى والصغرى:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow [3x^2 = 3] \div 3$$

$$x^2 = 1 \quad \text{بالجذر} \Rightarrow x = \pm 1$$



$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$

(1, 0) نقطة نهاية صغرى محلية

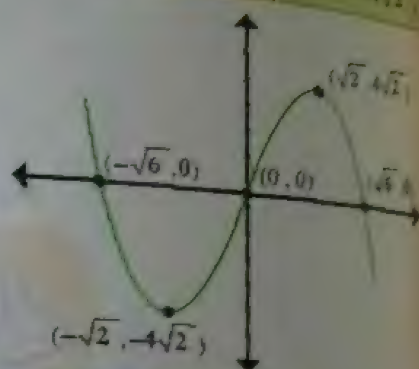
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2$$

$$= -1 + 3 + 2 = 4$$

(-1, 4) نقطة نهاية عظمى محلية

سادسا، الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\sqrt{6}$	0	$(\sqrt{6}, 0)$
$-\sqrt{6}$	0	$(-\sqrt{6}, 0)$
$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$
$-\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$



سؤال 7 باستخدام معلوماتك بالتفاضل

$$f(x) = (x+2)(x-1)^2 \quad \text{ارسم منحنى الدالة}$$

مع مجال للدالة R

نقاط التقاطع مع المحاور

مع محور السينات $y = 0$

$$(x+2)(x-1)^2 = 0$$

$$\text{أما } x+2=0 \Rightarrow x=-2, (-2, 0)$$

$$\text{أو } (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1, (1, 0)$$

مع محور الصادات $x=0$

$$f(0) = (0+2)(0-1)^2$$

$$= (2)(1) = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

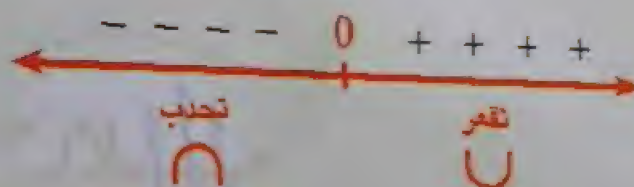
$\{x : x > 1\}$ مناطق التزايد

$\{x : x < -1\}$

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة $(-1, 1)$
سادساً، التغير والتحدب ونقاط الانقلاب

$$f'(x) = 6x$$

$$6x = 0 \Rightarrow x = 0$$



$$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$$

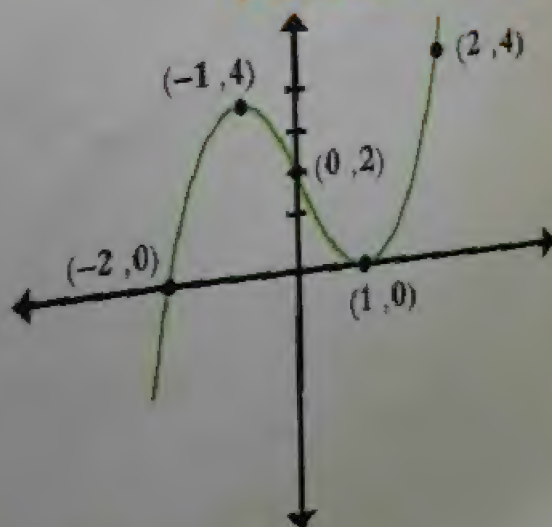
نقطة انقلاب $(0, 2)$

$\{x : x > 0\}$ مناطق التقعر

$\{x : x < 0\}$ مناطق التحدب

سابعاً، الجدول والرسم

x	y	(x, y)
-2	0	(-2, 0)
1	0	(1, 0)
0	2	(0, 2)
-1	4	(-1, 4)
2	4	(2, 4)



إضافية للمساعدة

$$\{x: x > 2\} \cup \{x: x < 0\}$$

مناطق التزايد

مناطق التناقص في الفترة المفتوحة (0, 2)

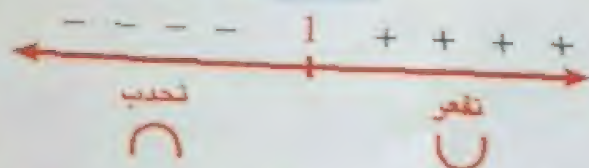
سادساً، التفرع والتعذب ونقاط الانقلاب

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 6x - 6$$

$$6x - 6 = 0$$

$$6x = 6 \Rightarrow x = 1$$



$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4$$

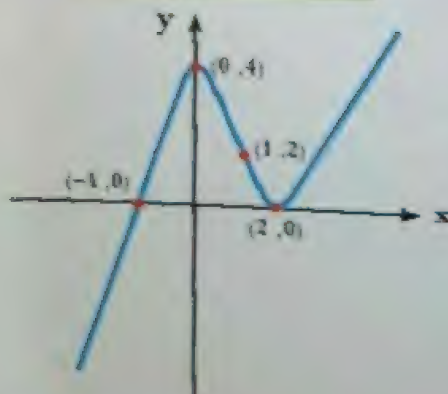
$$= 1 - 3 + 4 = 2 \Rightarrow (1, 2) \text{ نقطة انقلاب}$$

$$\{x: x > 1\} \cup \{x: x < 1\}$$

مناطق التحدب مناطق التقعّر

سابعاً، الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
2	0	(2, 0)
1	2	(1, 2)
-1	0	(-1, 0)



$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

رسم ملحي الدالة

رسم ملحي الدالة R

نقاط التقاطع مع المحاور

$$y = 0$$

$$x^3 - 3x^2 = 4 = 0$$

$$x = 0$$

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f(-x) = -x^3 - 3x^2 + 4$$

$$= -(x^3 + 3x^2 - 4)$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

لا يوجد تناظر

ولها، المعاديات، لا يوجد لأن الدالة ليست نسبية.

خامساً، النهايات العظمى والصغرى:

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

$$[3x^2 - 6x = 0] + 3$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{أو } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$



رسم الدوال النسبية

قبل البدء في الموضوع علينا أن نتذكر ما هي الدالة النسبية
الدالة النسبية: وهي الدالة لها بسط ومقام بشرط يوجد (x) في المقام ذات أس موجب

مثلاً: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

في رسم الدوال النسبية هنالك 7 خطوات

طبعاً كما تعلمنا في السابق في رسم الدوال لكن هنا خطوتين تختلف عما تعلمناه في السابق
سوف نتطرق إليهما.

1 أوسع مجال الدالة:

* نأخذ المقام ونساويه للصفر.

* نجد قيم (x) التي تجعل المقام صفر $\leftarrow R / \{x\}$ للتوضيح

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \rightarrow R / \{1\}$$

ملاحظة

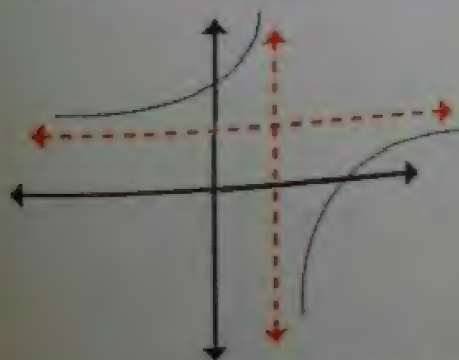
أوسع مجال الدالة النسبية R

يكون المقام مجموع مربعين (رقم $+ x^2$) في هذه الحالة يكتب مباشرة أوسع مجال هو R

2 المعاديات:

المعاديات نوعين:

(1) شاقولي (2) أفقي

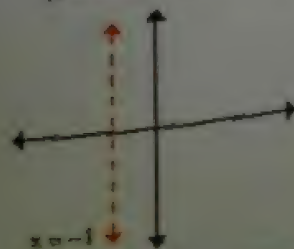


أولاً، المعادي الشاقولي

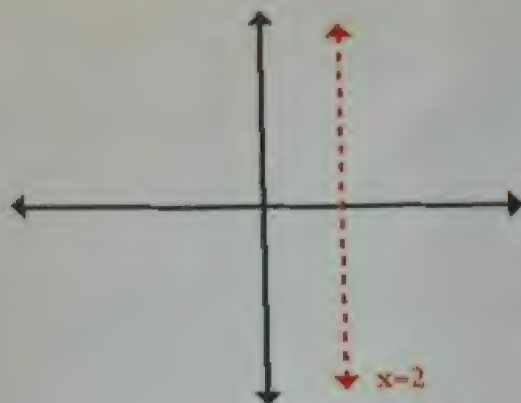
يتم استخراج المعادي الشاقولي عن طريق مساواة المقام للصفر

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1} \rightarrow x+1=0$$

$$x=-1$$



الاحتمالي
التطبيقي



مثلاً، $f(x) = \frac{5-x}{2x-4}$

$2x-4=0 \Rightarrow x=2$

لا يوجد محاذي شاقولي إذا كانت مقام الدالة مجموع مربعين كما في المثالين التاليين:

لا يوجد محاذي شاقولي $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$ ، $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$

ثانياً، المحاذي الأفقي: $y = \frac{\text{معامل } x \text{ بالبسط}}{\text{معامل } x \text{ بالمقام}}$ ←

بشرط أن يكون أس x في المقام يساوي أس x في البسط

① $\frac{3x-1}{x+1} \rightarrow y = \frac{3}{1} \rightarrow y = 3$

② $\frac{5-x}{2x-4} = y = \frac{-1}{2}$

لا يكون المحاذي الأفقي $= 0$ عندما أس x في المقام \neq أس x بالبسط.

ملاحظة لاحظ هنا أس x في البسط صفر والمقام واحد وفي المثال الآخر اثنين لذلك المحاذي الأفقي يساوي صفر

$f(x) = \frac{1}{x}$ ، $y = \frac{3}{x^2}$

خامسا، النهايات العظمى والصغرى.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

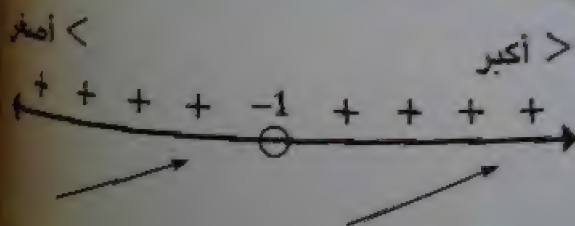
$$\bar{f}(x) = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow 2 \neq 0$$

عندما لا توجد قيمة لـ x فنناقص
خط الأعداد باستخدام قيمة x التي
استخرجناها في أوسع مجال.



∴ الدالة متزايدة دائماً

$$\{x: x < -1\} \cup \{x: x > -1\}$$

مناطق التزايد

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{أرسم منحنى الدالة}$$

$$x+1=0 \quad \text{ولا، توسع مجال الدالة}$$

$$x=-1 \quad R / \{-1\}$$

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور

$$y=0 \quad \text{مع محور السينات}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow x-1=0$$

$$x=1 \Rightarrow (1, 0)$$

$$x=0 \quad \text{مع محور الصادات}$$

$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

ثالثاً، التناظر

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1} = \frac{-(x+1)}{-x+1}$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x) \quad \text{لا يوجد تناظر}$$

رابعاً، المقادير

$$\text{2) الأفقي}$$

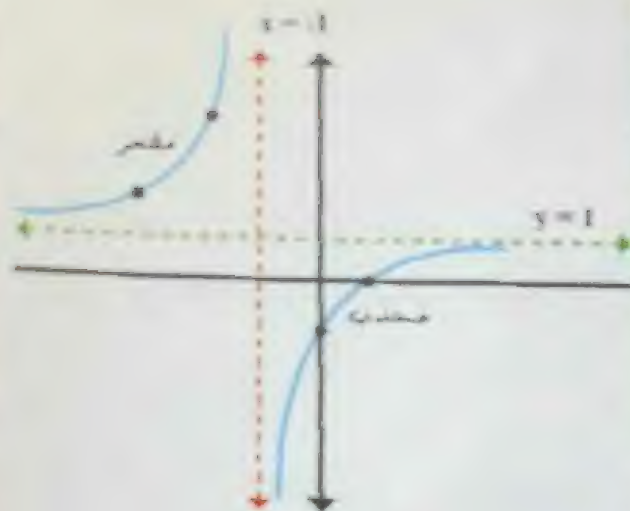
$$f(x) = \frac{1x-1}{1x+1}$$

$$y = \frac{1}{1} \Rightarrow y=1$$

$$\text{1) الشاقولي}$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$



تحذير هام جدا

إن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه تحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الأنترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٢ وللمحكمة حق مصادرة المنشجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليب والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزرمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

نقطة التقعر والتحدب ونقطة الانقلاب

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2(0) - 2[(2)(x+1)(1)]}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

الفحص

$$-4 \neq 0$$



$$\{x : x > -1\}, \{x : x < -1\}$$

مناطق التحدب

مناطق التقعر

ملامحة الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
0	-1	(0, -1)
1	0	(1, 0)
-2	3	(-2, 3)
-3	2	(-3, 2)

الملاحظة: نعرض بالمالة الاصلية

المستند في الرياضيات

خامساً، النهايات العظمى والصغرى،

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{(x+1)(3) - (3x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

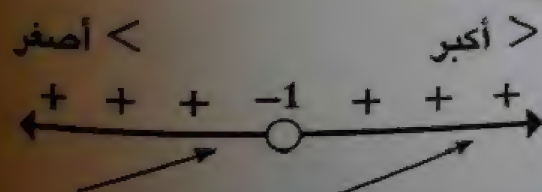
$$\bar{f}(x) = \frac{\cancel{3}x+3-\cancel{3}x+1}{(x+1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$$

الفحص

$$\frac{4}{(x+1)^2} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow 4 \neq 0$$

عندما لا توجد قيمة لـ x فننا نفحص
خط الاعداد باستخدام قيمة x التي
استخرجناها في اوسع مجال .



∴ الدالة متزايدة دائماً

$$\{x: x > -1\}$$

$$\{x: x < -1\}$$

مناطق التزايد

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

سؤال 2 ارفع مستوى الدالة

$$x+1=0$$

$$x=-1 \quad R/\{-1\}$$

أو لا أوسع مجال للدالة

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحاور

$$y=0$$

1 مع محور السينات

$$\frac{3x-1}{x+1}=0 \Rightarrow 3x-1=0$$

$$x=\frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$x=0$$

2 مع محور الصادات

$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

ثالثاً، التناظر

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

$$f(-x) = \frac{-3x-1}{-x+1} = \frac{-(3x+1)}{-x+1}$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

3 يوجد تناظر

رابعاً، المعادلات

1 الشافولي

2 الافقي

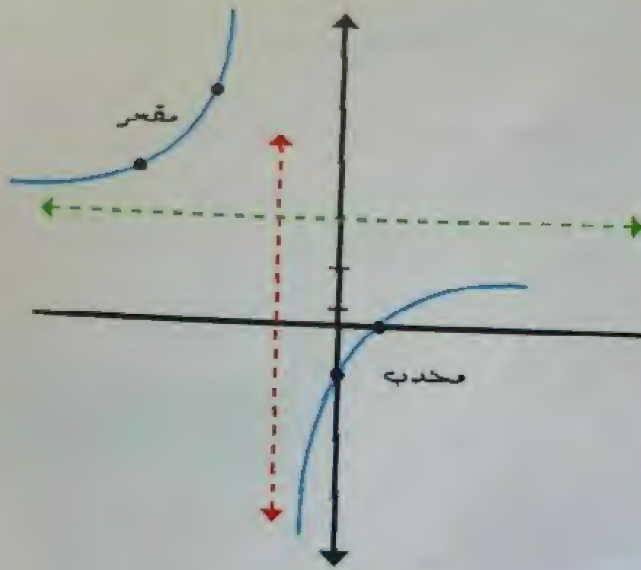
$$f(x) = \frac{3x-1}{1x+1}$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$y = \frac{3}{1} \Rightarrow y=3$$

تطبيقات التفاضل



سادساً: التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{f}(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$$

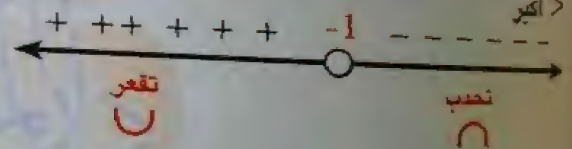
$$\bar{f}'(x) = \frac{(x+1)^2(0) - 4(2)(x+1)^1(1)}{(x+1)^4}$$

$$\bar{f}' = \frac{-8(x+1)}{(x+1)^4} \Rightarrow \bar{f}'(x) = \frac{-8}{(x+1)^3}$$

الفصل

$$\frac{-8}{(x+1)^3} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow -8 \neq 0$$

< أصغر



{x : x > -1} مناطق التحدب

{x : x < -1} مناطق التقعر

سابعاً: الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
$\frac{1}{3}$	0	$(\frac{1}{3}, 0)$
0	-1	(0, -1)
-2	7	(-2, 7)
-3	5	(-3, 5)

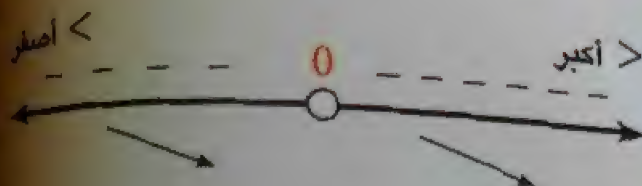


المستند في الرياضيات

$$\bar{f}(x) = -x \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{-1}{x^2} \neq 0 \Rightarrow -1 \neq 0$$

الفحص



الدالة متناقصة دائماً

$$\{x: x < 0\}, \{x: x > 0\}$$

مناطق التناقص

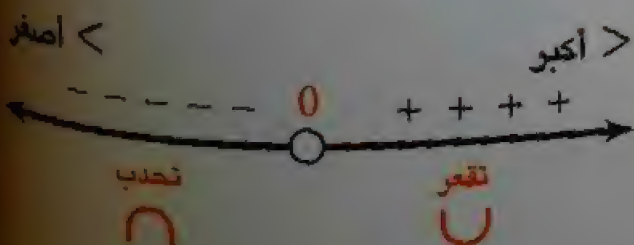
سادساً، التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{f}(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow \bar{f}(x) = -x^{-2}$$

$$\bar{f}(x) = +2x^{-3} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{2}{x^3} \neq 0 \Rightarrow 2 \neq 0$$

الفحص



$$\{x: x > 0\}, \{x: x < 0\}$$

مناطق التقعر

مناطق التحدب

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ارسم منحنى الدالة

سؤال 3

$$x=0$$

أولاً، أوسع مجال للدالة

العل

$$\mathbb{R} / \{0\}$$

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين

$$y=0$$

1 مع محور السينات

$$\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$$

لا يوجد نقطة تقاطع مع محور السينات

$$x=0$$

2 مع محور الصادات

$$x=0 \notin$$

مجال الدالة

لا يوجد نقطة تقاطع مع محور الصادات

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ثالثاً، التناظر

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

رابعاً، المعاديات

$$y=0$$

2 الأفقي

$$x=0$$

1 الشاقولي

خامساً، النهايات العظمى والصغرى

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x^{-1}$$

تعديل

تطبيقات التفاضل

الاحيائي والتطبيقي

2

سؤال 4 ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

أولاً، أوسع مجال للدالة $(x^2 + 1) \neq 0$

أوسع مجال للدالة هو R

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين

1 مع محور السينات $y = 0$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2-1=0$$

$$x = \pm 1 \Rightarrow (-1, 0), (1, 0)$$

2 مع محور الصادات $x = 0$

$$f(0) = \frac{(0)^2-1}{(0)^2+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$(0, -1)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \text{ثالثاً، التناظر:}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$f(x) = f(-x)$$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

رابعاً، المحاذيات

2 الأفقي

$$f(x) = \frac{1x^2-1}{1x^2+1}$$

$$y = \frac{1}{1} \Rightarrow y = 1$$

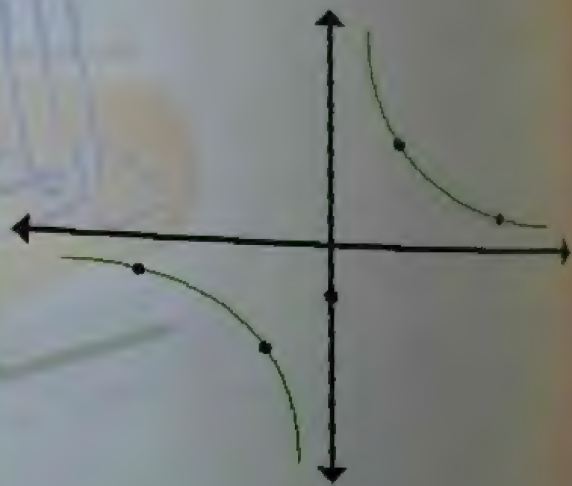
1 الشاقولي

لا يوجد

$$(x^2 + 1) \neq 0$$

سابعاً، الجدول والرسم:

x	y	(x, y)
-2	$-\frac{1}{2}$	$(-2, -\frac{1}{2})$
-1	-1	$(-1, -1)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$



Blank lines for additional work or notes.

سادسا، التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$f(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)^2(4) - 4x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

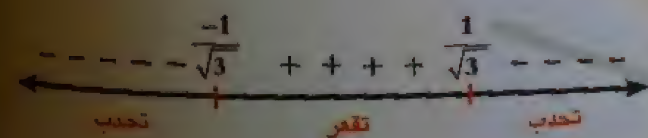
$$f'(x) = \frac{(x^2+1)^1 [4(x^2+1) - 16x^2]}{(x^2+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 4 - 16x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow [12x^2 = 4] \div 12$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{-1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right)$$

نقاط الانقلاب

المُسند في الرياضيات

خامسا، النهايات العظمى والصغرى:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad \text{الفحص}$$

$$\frac{4x}{(x^2+1)^2} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow [4x = 0] \div 4$$

$$x = 0$$



$$f(0) = \frac{(0)^2 - 1}{(0)^2 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

نقطة نهاية صغرى محلية (0, -1)

$$\{x: x > 0\} \cdot \{x: x < 0\}$$

مناطق تناقص مناطق تزايد

13 / 1997

سؤال 5 ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

أولاً، أوسع مجال للدالة R

لأن $x^2 + 3 \neq 0$

ثانياً، نقاط التقاطع مع المحورين

(1) مع محور السينات $y = 0$

$$\frac{6}{x^2+3} = 0 \Rightarrow 6 \neq 0$$

لا يوجد نقطة تقاطع مع محور السينات

(2) مع محور الصادات $x = 0$

$$f(0) = \frac{6}{(0)^2+3} = \frac{6}{3} = 2, (0, 2)$$

ثالثاً، التناظر

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3}$$

$$f(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3}$$

$$f(x) = f(-x) \text{ منظرية حول محور الصادات}$$

رابعاً، المحاذيات

(1) الشاقولي لا يوجد

(2) الأفقي $y = 0$

$$x^2 + 3 \neq 0$$

خامساً، النهايات العظمى والصغرى

$$\bar{f}(x) = \frac{(x^2+3)(0) - 6(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

الفحص

$$\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

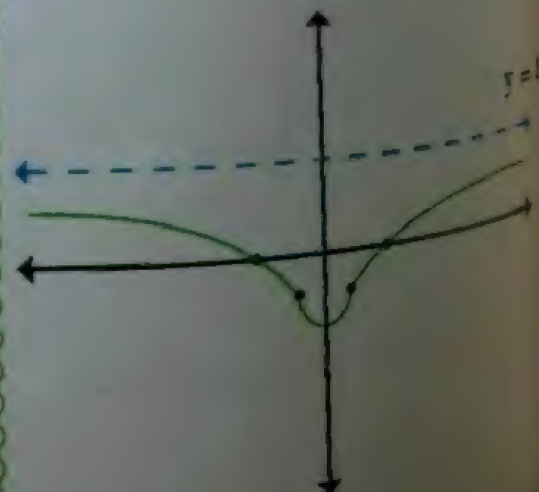
مناطق التحدب

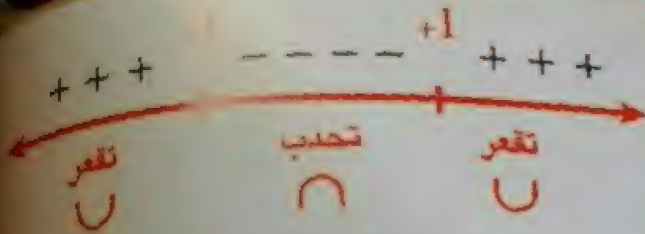
مناطق التفرع في الفترة المفتوحة

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

سبعاً، الجدول والرسم

x	y	(x, y)
-1	0	(-1, 0)
1	0	(1, 0)
0	-1	(0, -1)
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$





$$f(1) = \frac{6}{(1)^2 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f(-1) = \frac{6}{(-1)^2 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\left(-1, \frac{3}{2}\right), \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

نقاط الانقلاب

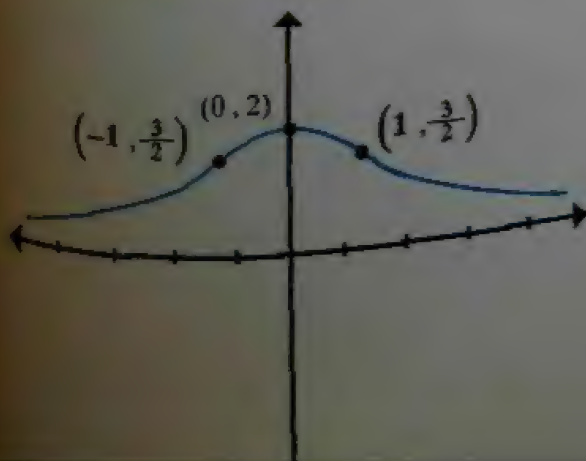
$$\{x : x < -1\}, \{x : x > 1\}$$

مناطق التقعر

الدالة محدبة في الفترة المفتوحة $(-1, 1)$
سابعاً، الجدول والرسم:

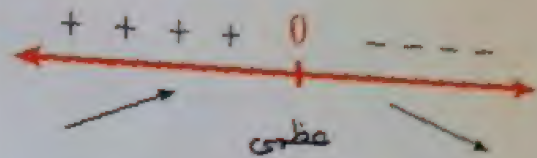
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
-1	$\frac{3}{2}$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$
1	$\frac{3}{2}$	$\left(1, \frac{3}{2}\right)$
2	$\frac{6}{7}$	$\left(2, \frac{6}{7}\right)$
-2	$\frac{6}{7}$	$\left(-2, \frac{6}{7}\right)$

إضافية
للمساعدة



$$\frac{-12x}{(x^2+3)^2} = 0 \Rightarrow -[12x=0] \Rightarrow -12$$

$$x=0$$



$$f(0) = \frac{6}{0^2 + 3} = 2$$

نقطة نهاية عظمى (0, 2)

$$\{x : x > 0\}, \{x : x < 0\}$$

مناطق تناقص مناطق تزايد

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (-12x)(2(x^2+3)(2x))}{(x^2+3)^4}$$

سادساً، التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)[-12(x^2+3)+48x^2]}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$$

الفحص

$$\frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3} = 0 \Rightarrow 36x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow \text{بالجذر } x = \pm 1$$

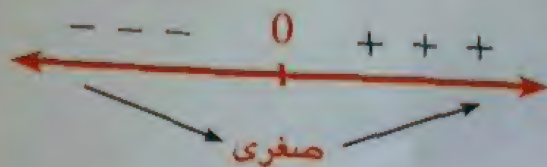
الاحيائي
التطبيقي

$$\bar{f}(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

الفحص

$$\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow [2x = 0] \div 2 \Rightarrow x = 0$$



$$f(0) = \frac{(0)^2}{(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

(0, 0) نقطة نهاية صغرى محلية

$$\{x : x > 0\}, \{x : x < 0\}$$

مناطق تناقص مناطق تزايد

سادساً: التفرع والتحدب ونقاط الانقلاب

$$\bar{f}(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{(x^2 + 1)^2 \cdot 2 - (2x)2(x^2 + 1)^1 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{(x^2 + 1) [2(x^2 + 1) - 8x^2]}{(x^2 + 1)^4}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2 - 6x^2}{(x^2 + 1)^3}$$

الفحص

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

ارسم منحنى الدالة

1. اوجد مجال للدالة R

$$x^2 + 1 \neq 0$$

2. حدد التقاطع مع المحاور

مع محور السينات $y = 0$

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

مع محور الصادات $x = 0$

$$f(0) = \frac{(0)^2}{(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

دالة متناظرة حول محور الصادات

3. اوجد المعادلات

2. الافقي

$$y = 1$$

3. المماس

لا يوجد

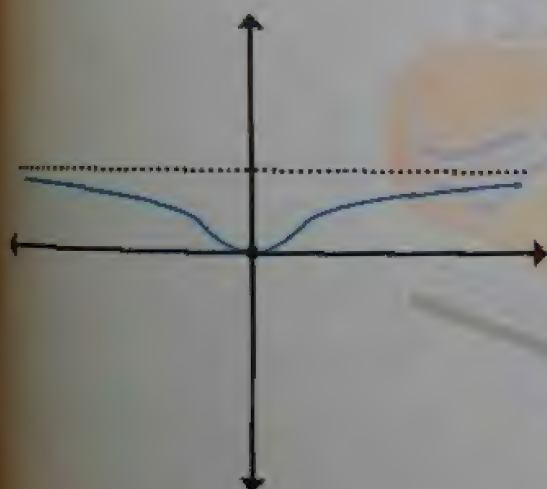
$$x^2 + 1 \neq 0$$

4. حدد النهايات العظمى والصغرى

$$\bar{f}(x) = \frac{(x^2 + 1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2 + 1)^3}$$

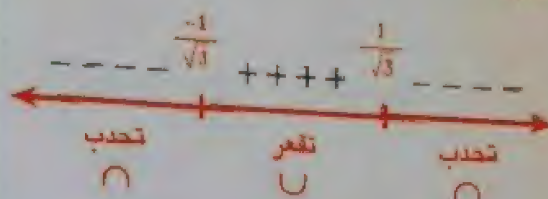
سابعاً، الجدول والرسم

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$
1	$\frac{1}{2}$	$(1, \frac{1}{2})$
-1	$\frac{1}{2}$	$(-1, \frac{1}{2})$



$$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 2-6x^2 = 0$$

$$[2=6x^2] \div 6 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3} + 1} = \frac{1}{4}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$$

نقاط انقلاب

$$\left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

مناطق التحدب

مناطق التقعّر في الفترة المفتوحة

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



تطبيقات عملية على النهايات العظمى والصغرى

الرسم + الفرضية

السؤال

مجهول

أكبر ما يمكن / أصظم ما يمكن
أصغر ما يمكن / أقل ما يمكن
أقرب ما يمكن / أبعد ما يمكن

معلوم

(حجم / مساحة / محيط)
[تستخدم قوانين
حجم / مساحة / محيط]

(نصف قطر / طول ساق...)
من الرسم نجد علاقة

فيثاغورس

تشابه مثلثان

تعويض

$f(x)$

بعد ان ينتج لنا دالة يتحول السؤال
تلقائيا الى نهايات عظمى و صغرى

1

القاعدة

نبدأ بالمجهول (القانون)

2

علاقة

$$x = 4 \text{ cm}$$

نعوض في معادلة 2 لاستخراج y

$$y = \frac{16}{x} \Rightarrow y = \frac{16}{4} \Rightarrow y = 4 \text{ cm}$$

نستخرج محيط

$$P = 2(x + y) \Rightarrow P = 2(4 + 4)$$

$$P = 16 \text{ cm}$$

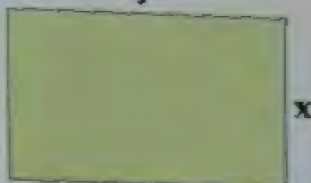
وهو اقل محيط

2014 ت ، 2006 د ، 2005 د ، 2017 د / الاحياء

جد اقل محيط ممكن لمستطيل

$$16 \text{ cm}^2$$

y



x

نفرض بعدي المستطيل x , y

$$A = 16 \text{ cm}^2$$

"القاعدة"

$$P = 2(x + y) \text{ محيط المستطيل} \quad \text{1}$$

$$A = x \cdot y \text{ مساحة المستطيل}$$

$$[16 = x \cdot y] + x$$

$$y = \frac{16}{x} \text{ 2 "الملاقة"}$$

نعوض معادلة 2 في 1

$$P = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) \text{ الدالة}$$

$$P = 2\left(x + 16x^{-1}\right) \text{ تعديل}$$

$$\bar{P} = 2(1 - 16x^{-2}) \text{ نشتق الدالة}$$

$$\bar{P} = 0 \text{ نساويها للصفر}$$

$$[2(1 - 16x^{-2}) = 0] \div 2$$

$$\left[1 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16 \text{ بالجزر التربيعي}$$

$$x = \pm 4$$

$$x = -4 \text{ نهمل لأن البعد لا يكون سالب}$$

وأله ما طلعت شمس ولا غربت
إلا وحبك مقرون بأنفاسي
ولا خلوت الح قوم احضتهم
إلا وأنت حديثي بين جلاسي
ولا ذكرتك محزوناً ولا فرحاً
إلا وأنت بقلبي بين وسواسي
ولا هممت بشرب الماء من عطشي
إلا رأيت خيلاً منك في الكاس



سؤال 3 جد حجم البر مخروط دائري قائم ناتج من دورات مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}$ cm دورة كاملة حول أحد ضلعيه القائمين.

نفرض نصف قطر المخروط $r =$

نفرض ارتفاع المخروط $h =$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{..... 1 "القاعدة"}$$

$$r^2 + h^2 = (6\sqrt{3})^2$$

$$r^2 + h^2 = 108$$

$$r^2 = 108 - h^2 \quad \text{..... 2 "العلاقة"}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (108 - h^2) (h)$$

$$V = \frac{\pi}{3} (108h - h^3)$$

$$\bar{V} = \frac{\pi}{3} (108 - 3h^2)$$

$$\left[\frac{\pi}{3} (108 - 3h^2) = 0 \right] \times \frac{3}{\pi}$$

$$108 - 3h^2 = 0 \Rightarrow [108 = 3h^2] \div 3$$

$$h^2 = 36$$

$$h = 6 \text{ cm}$$

$$r^2 = 108 - (6)^2$$

$$r^2 = 108 - 36 \Rightarrow r^2 = 72$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (\text{نجد الحجم})$$

$$\bar{V} = \frac{1}{3} \pi (72) (6)$$

$$V = 144 \pi \text{ cm}^3 \quad (\text{حجم أكبر مخروط})$$



1د/2016
1د/2014
1د/2006
2د/2009
خ/2د/2017

سؤال 2 علبة اسطوانية الشكل مملوءة من الأعلى سعتها $125 \pi \text{ cm}^3$ عند أبعادها عندما تكون مساحة البعد الممتد في صناعتها أصغر ما يمكن.

نفرض نصف القطر $r =$

نفرض الارتفاع $h =$

$$A = 2 \pi r h + 1 \pi r^2 \quad \text{..... 1 "القاعدة"}$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$[125 \pi = \pi r^2 h] \div r^2$$

$$h = \frac{125}{r^2} \quad \text{..... 2 "العلاقة"}$$

$$A = 2 \pi r h + \pi r^2$$

$$A = 2 \pi r \left(\frac{125}{r^2} \right) + \pi r^2$$

$$A = \frac{250 \pi}{r} + \pi r^2$$

$$A = 250 \pi r^{-1} + \pi r^2$$

$$[A' = -250 \pi r^{-2} + 2 \pi r] \quad \text{مشتقة الدالة}$$

$$\left[\frac{-250 \pi}{r^2} + 2 \pi r = 0 \right] \times r^2$$

$$-250 \pi + 2 \pi r^3 = 0$$

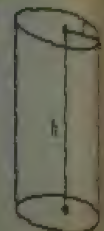
$$[2 \pi r^3 = 250 \pi] \div 2 \pi$$

$$r^3 = 125$$

بالجذر التكعيبي

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$h = \frac{125}{r^2} = \frac{125}{25} \Rightarrow h = 5 \text{ cm}$$



الدالة

$$h = \sqrt{128 - x^2}$$

$$h = \sqrt{128 - 64} \Rightarrow h = 8 \text{ cm}$$

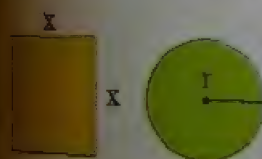
$$A = \frac{1}{2} (2x) (h) \Rightarrow A = xh$$

$$A = (8) (8) = 64 \text{ cm}^2$$

تمهيدي / 2016

2017 / د 1 / تطبيقي (العدد كان $4\sqrt{2}$)

سؤال 5 مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60 أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.



تلميح: المطلوب هو السؤال
أثبت أن $2r = x$

نفرض نصف قطر الدائرة $r =$
نفرض طول ضلع المربع $x =$

$$A = A_{\text{دائرة}} + A_{\text{مربع}}$$

$$A = \pi r^2 + x^2 \dots\dots \text{1 "القاعدة"}$$

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60

$$60 = P_{\text{دائرة}} + P_{\text{مربع}}$$

$$[2x + 2\pi r = 60] \div 2$$

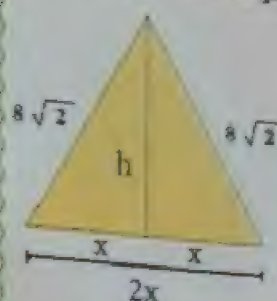
$$2x + \pi r = 30$$

$$[\pi r = 30 - 2x] \div \pi$$

$$r = \frac{30 - 2x}{\pi}$$

$$\dots\dots \text{2 "العلاقة"}$$

سؤال 4 جد أكبر مساحة لهثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2} \text{ cm}$



نفرض الارتفاع $h =$
نفرض طول القاعدة $2x =$

$$A = \frac{1}{2} (2x) (h)$$

$$A = (x) (h) \dots\dots \text{1 "القاعدة"}$$

$$x^2 + h^2 = (8\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + h^2 = 128$$

$$h^2 = 128 - x^2$$

$$h = \sqrt{128 - x^2} \dots\dots \text{2 "العلاقة"}$$

$$A = (x) (h) = \text{في 1 نفوض معادلة 2}$$

$$A = x \cdot \sqrt{128 - x^2}$$

$$A = \sqrt{x^2 (128 - x^2)}$$

$$A = \sqrt{128x^2 - x^4} \text{ الدالة}$$

$$\bar{A} = \frac{256(x) - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}} \text{ المشتقة}$$

$$[256x - 4x^3 = 0] \div 4$$

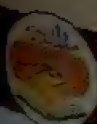
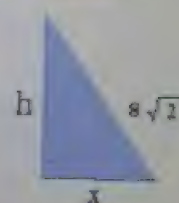
$$64x - x^3 = 0 \text{ عامل مشترك}$$

$$x(64 - x^2) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

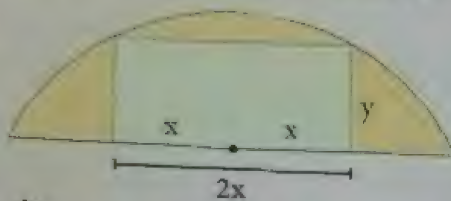
$$\text{أو } 64 - x^2 \Rightarrow x^2 = 64 \text{ بالجذر}$$

$$x = 8 \text{ cm}$$



سؤال 6 جد بُعدي البر مستطيل بوضوح

داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}$ cm



نفرض بعدي المستطيل $2x, y$

$A = 2x \cdot y$ 1 "القاعدة"

$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2$

$x^2 + y^2 = 32 \Rightarrow y^2 = 32 - x^2$ بالجذر التربيعي

$y = \sqrt{32 - x^2}$ 2 "العلاقة"

نعوض معادلة 2 في 1

$A = 2x \sqrt{32 - x^2}$

$A = 2 \sqrt{32x^2 - x^4}$

الدالة

$\bar{A} = \cancel{2} \frac{64x - 4x^3}{\cancel{2} \sqrt{32x^2 - x^4}}$ المشتقة

$[64x - 4x^3 = 0] + 4 \Rightarrow 16x - x^3 = 0$

$x(16 - x^2) = 0$

1- $x = 0$ 2- $16 - x^2 = 0$

$16 = x^2 \Rightarrow x = 4$ cm

$y = \sqrt{32 - x^2} = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16}$

$y = 4$ cm

بعدي المستطيل

$2x = 2(4) = 8$ cm

$y = 4$ cm

1 في $A = \pi \left(\frac{30-2x}{\pi} \right)^2 + x^2$

$A = \pi \cdot \frac{(30-2x)^2}{\pi^2} + x^2$

$A = \frac{1}{\pi} (900 - 120x + 4x^2) + x^2$

$\bar{A} = \frac{1}{\pi} (-120 + 8x) + 2x$

$\left[\frac{1}{\pi} (-120 + 8x) + 2x = 0 \right] \cdot \pi$

$-120 + 8x + 2\pi x = 0$

$[8x + 2\pi x = 120] + 2$

$4x + \pi x = 60 \Rightarrow x(4 + \pi) = 60$

$x = \frac{60}{4 + \pi}$ cm

2 معادلة

$r = \frac{(30-2x)}{\pi} \Rightarrow r = \frac{1}{\pi} (30-2x)$

$r = \frac{1}{\pi} \left(30 - 2 \cdot \frac{60}{\pi+4} \right)$

$r = \frac{1}{\pi} \left(30 - \frac{120}{\pi+4} \right)$

$r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{30\pi + 120 - 120}{\pi + 4}$

$r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{30\pi}{\pi+4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi+4}$ cm

$2r = \frac{60}{\pi+4} = x$

طريقة

لقد تم السؤال بطريقة الهندسة القديم عندما يقول :
 "جد بعدي المستطيل الذي يمكن وضعه في دائرة نصف قطرها 4\sqrt{2} cm"
 فالحل هو :
 نضع المستطيل في الدائرة بحيث يكون مركزه هو مركز الدائرة.
 لنفرض بعدي المستطيل x و y.
 نعلم ان نصف قطر الدائرة هو 4\sqrt{2} cm.
 لنفرض O مركز الدائرة و M مركز المستطيل.
 نعلم ان OM عمودي على BC (حيث BC ضلع المستطيل).
 لنفرض OM = h و BM = x.
 في المثلث OBM :
 OB^2 = OM^2 + BM^2
 (4\sqrt{2})^2 = h^2 + x^2
 32 = h^2 + x^2
 h^2 = 32 - x^2
 h = \sqrt{32 - x^2} = y
 إذن بعدي المستطيل هما x و y = \sqrt{32 - x^2}.

1د/2012

ت/2013

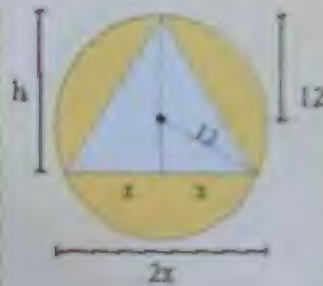
1د/2009

4د/2015

1د/2016

سؤال 7 جد بعدي الارتفاع من مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12cm ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

التحليل



2003
2006
2010
2012 خارج القصر

$$[72h^2 - 4h^4 = 0] + 4$$

$$18h^2 - h^4 = 0$$

$$h^2(18 - h) = 0$$

$$h^2 = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ (بمهل)}$$

$$18 - h = 0 \Rightarrow h = 18 \text{ cm}$$

نعوض بالمعاني

$$x = \sqrt{24h - h^2}$$

$$x = \sqrt{24(18) - (18)^2}$$

$$x = \sqrt{432 - 324} = \sqrt{108}$$

$$x = \sqrt{36 \times 3} \Rightarrow x = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{طول القاعدة } 2x = 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة

$$A = \frac{1}{2} (2x) (h) = (6\sqrt{3}) (18)$$

$$A = 108\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A = \pi r^2 = \pi (12)^2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

$$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

نتيجة

قد يقول جد مساحة الارتفاع من مثلث متساوي الساقين
استخرج بعدين سوف نقوم باستخراج
المساحة.

نفرض ارتفاع المثلث يساوي h

2x = نفرض طول القاعدة

$$A = \frac{1}{2} (2x) (h)$$

$$A = x \cdot h \text{ 1 "القاعدة"}$$

$$h-12 \quad x \quad 12 \quad x^2 + (h-12)^2 = (12)^2$$

$$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$

$$x^2 + h^2 - 24h = 0$$

$$x^2 = 24h - h^2 \text{ بالجذر}$$

$$x = \sqrt{24h - h^2} \text{ 2 "العلاقة"}$$

نعوض معادلة 2 في 1

$$A = x \cdot h$$

$$A = \sqrt{24h - h^2} \cdot h$$

$$A = \sqrt{24h^2 - h^3} \text{ الدالة}$$

$$A' = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^2 - h^3}} \text{ المشتقة}$$

سؤال 9 جد ارتفاع البر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}$



نفرض نصف القطر $r =$
نفرض الارتفاع $2h =$

$$V = \pi r^2 \cdot 2h \quad \text{..... 1 "القاعدة"}$$

$$r^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2$$

$$r^2 + h^2 = 48$$

$$r^2 = 48 - h^2 \quad \text{..... 2 "العلاقة"}$$

نعوض معادلة 2 في 1

$$V = 2\pi (48 - h^2) \cdot h$$

$$V = 2\pi (48h - h^3) \rightarrow \text{الدالة}$$

$$\bar{V} = 2\pi (48 - 3h^2) \rightarrow \text{المشتقة}$$

$$[2\pi (48 - 3h^2) = 0] \div 2\pi$$

$$48 - 3h^2 = 0 \Rightarrow [48 = 3h^2] \div 3$$

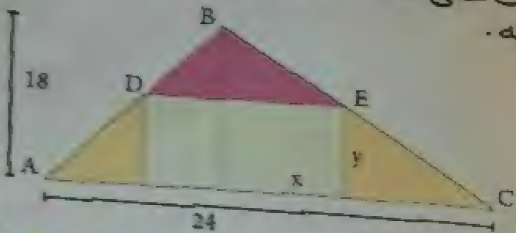
$$h^2 = 16 \xrightarrow{\text{بالجذر}} h = 4$$

3د/2012

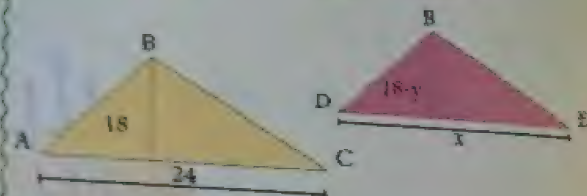
$$\text{الارتفاع} = 2h = 8 \text{ cm}$$

يجب أن تضرب h في 2 لأنه
تم فرضه $2h$

سؤال 8 جد بعدي البر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24cm وارتفاعه 18cm بحيث أن رأسين متجاورين تقعان على القاعدة والرأسين الباقين على ساقيه.



$$A = x \cdot y \quad \text{..... 1 "القاعدة"}$$



من تشابه المثلثين ABC, DBE

$$\frac{24}{x} = \frac{18}{18-y}$$

$$[18x = 24(18-y)] \div 18$$

$$x = \frac{24(18-y)}{18} \Rightarrow x = \frac{4}{3}(18-y) \quad \text{..... 1 "العلاقة"}$$

$$A = x \cdot y$$

$$A = \frac{4}{3}(18-y) \cdot y$$

$$A = \frac{4}{3}(18y - y^2) \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{A} = \frac{4}{3}(18-2y) \Rightarrow \left[\frac{4}{3}(18-2y) = 0 \right] \cdot \frac{3}{4}$$

$$18-2y = 0 \Rightarrow 18 = 2y \Rightarrow y = 9 \text{ cm}$$

$$x = \frac{4}{3}(18-9)$$

$$x = \frac{4}{3}(9) \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

2د/2013

تمهيدي/2015

جد حجم البر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3cm

سؤال 10

$$[12h - 3h^2 = 0] \div 3$$

$$4h - h^2 = 0$$

$$h(4 - h) = 0$$

أ) $h = 0$

يُقبل

ب) $4 - h = 0 \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$

2 نعوض بمعادلة

$$r^2 = 6h - h^2$$

$$r^2 = 6(4) - (4)^2$$

$$r^2 = 24 - 16$$

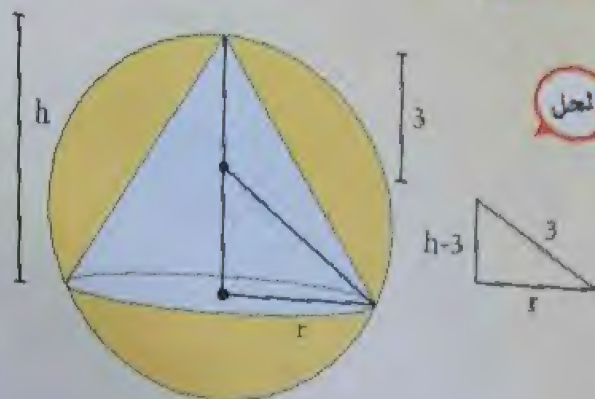
$$r^2 = 8$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (8) (4)$$

$$V = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

12/2008



الحل

$r =$ نصف القطر

$h =$ الارتفاع

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \dots\dots 1 \text{ "القاعدة"}$$

$$(h-3)^2 + r^2 = (3)^2$$

$$h^2 - 6h + 9 + r^2 = 9$$

$$r^2 = 6h - h^2 \dots\dots 2 \text{ "العلاقة"}$$

• نعوض العلاقة في القاعدة

$$V = \frac{\pi}{3} (6h - h^2) \cdot h$$

$$V = \frac{\pi}{3} (6h^2 - h^3) \rightarrow \text{الدالة}$$

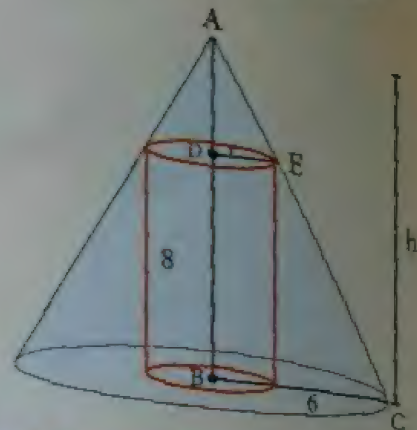
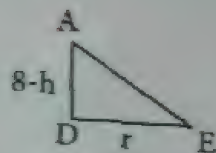
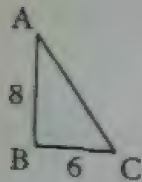
$$\bar{V} = \frac{\pi}{3} (12h - 3h^2) \rightarrow \text{المشتقة}$$

$$\left[\frac{\pi}{3} (12h - 3h^2) = 0 \right] \times \frac{3}{\pi}$$

جد أبعاد البر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm.

$r =$ نفرض نصف القطر

$h =$ نفرض الارتفاع



الحل

$$\bar{V} = \frac{\pi}{3} (48r - 12r^2)$$

$$\left[\frac{\pi}{3} (48r - 12r^2) = 0 \right] \cdot \frac{3}{\pi}$$

$$[48r - 12r^2 = 0] \div 12$$

$$4r - r^2 = 0$$

$$r(4 - r) = 0$$

١- $r = 0$ يُهمل

٢- $4 - r = 0 \Rightarrow r = 4$ cm

$$h = \frac{24 - 4r}{3}$$

$$h = \frac{24 - 4(4)}{3} = \frac{24 - 16}{3}$$

$$h = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

$$V = \pi r^2 h \dots \dots \dots 1$$

ABC , ADE

$$\frac{8}{8-h} = \frac{6}{r} \text{ من تشابه المثلثين}$$

$$8r = 6(8-h)$$

$$8r = 48 - 6h$$

$$[6h = 48 - 8r] \div 2$$

$$[3h = 24 - 4r] \div 3$$

$$h = \frac{24 - 4r}{3} \dots \dots \dots 2$$

نعوض العلاقة في القاعدة

$$V = \pi r^2 \left(\frac{24 - 4r}{3} \right)$$

$$V = \frac{\pi}{3} (24r^2 - 4r^3)$$

إذا طلب نقطة أقرب ما يمكن لنقطة أخرى نستخدم قانون البعد بين نقطتين $S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ لنجد القاعدة

ملاحظة

كل علاقة في السؤال سواء كانت معادلة قطع أو دالة $f(x)$ أو أي معادلة لمنحني آخر هي العلاقة.

ملاحظة

$$\frac{4y - 8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}} = 0$$

$$4y - 8 = 0$$

$$[4y = 8] \div 4 \Rightarrow y = 2$$

$$x^2 = y^2 - 3 \quad \text{تعويض معادلة 2}$$

$$x^2 = 4 - 3 \Rightarrow x^2 = 1 \quad \text{بالبجذر}$$

$$x = \pm 1$$

$$P_1(1, 2), P_2(-1, 2)$$

2د/2011

2012/تمهيدي

1د/2013

2016/2د/خ

سؤال 12 جد نقطة أو نقاط تنتمي إلى القطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0, 4)$.

نفرض النقطة $P(x, y)$ x_1, y_1 x_2, y_2 $(0, 4)$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2}$$

"القاعدة"

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} \quad \text{..... 1}$$

$$y^2 - x^2 = 3 \Rightarrow y^2 - 3 = x^2$$

$$x^2 = y^2 - 3 \quad \text{..... 2 "العلاقة"}$$

نعوض العلاقة في القاعدة

$$S = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16}$$

$$S = \sqrt{2y^2 - 8y + 13} \quad \text{الدالة}$$

$$\bar{S} = \frac{(4y - 8)}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}}$$

2 ج

والاحيائي
التطبيقي

تطبيقات التفاضل

جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن.

سؤال 14

نفرض العدد الأول $x =$

نفرض العدد الثاني $y =$

1 "القاعدة" $m = x \cdot y^2$

$x + y = 75$

2 "العلاقة" $x = 75 - y$

نعوض العلاقة في الدالة

$m = (75 - y) \cdot y^2$ 2008/4د/ أنبار

الدالة $m = 75y^2 - y^3$

$m = 150y - 3y^2$

$[150y - 3y^2 = 0] \div 3$

$50y - y^2 = 0$

$y(50 - y) = 0$

أ) $y = 0$ يُهمل

ب) $50 - y = 0$

$y = 50$

$x = 75 - y$

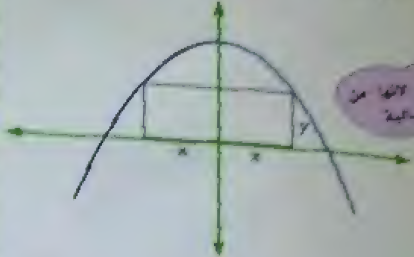
$x = 75 - 50$

$x = 25$

فكر
إذا كانت $y + 4x = 24$
حدفيمتي y و x
التي تجعل yx^2
أكبر ما يمكن.
ج: $x = 4$ ، $y = 8$

فكر
جد العدد الذي
أضيفت اليه نظيرة
الضرب يكون
النتيجة أكبر ما يمكن
ج: 1

سؤال 13
جد بعدي المستطيل
يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة
 $f(x) = 12 - x^2$ كـ محور السينات رأسات من
رأسه على المنحني والرأسات الأخرى على
محور السينات ثم جد محيطه.



محور السينات هو المحور الأفقي والمحور
الordinates هو المحور العمودي

نفرض بعدي المستطيل $2x$ ، y

$A = 2x \cdot y$

$f(x) = 12 - x^2$

$y = 12 - x^2$

$A = 2x(12 - x^2)$

$A = 24x - 2x^3$

$A = 24 - 6x^2$

$24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow [24 = 6x^2] \div 6$

بالجذر $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

$\therefore y = 12 - x^2 \Rightarrow y = 12 - (2)^2$

$y = 8$

بعدي المستطيل $2x$ ، y

4 ، 8

محيط المستطيل $P = 2(2x + y)$

$P = 2(4 + 8)$

وحدة طول $P = 24$

سؤال 16 جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (6, 8) والذي يقطع المحاور في الربع الأول أصغر مثلث.



$x =$ نفرض طول القاعدة
 $y =$ نفرض الارتفاع

1 "القاعدة" $A = \frac{1}{2} x \cdot y$

$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $(0, y), (6, 8)$

$m_1 = \frac{8 - y}{6 - 0} = \frac{8 - y}{6}$

$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $(6, 8), (x, 0)$

$m_2 = \frac{8 - 0}{6 - x} = \frac{8}{6 - x}$

$\frac{8 - y}{6} = \frac{8}{6 - x}$, $m_1 = m_2$

$(8 - y)(6 - x) = 48$

$48 - 8x - 6y + xy = 48$

$xy = 8x + 6y$ **2** "العلاقة"

سؤال 15 جد العدد الذي إذا أضيفه إلى مربعه يكون الناتج أصغر ما يمكن.

$x =$ نفرض العدد

$x^2 =$ نفرض مربع العدد

الدالة $m = x + x^2$

المشتقة $m' = 1 + 2x$

$1 + 2x = 0$

$[2x = -1] \div 2$

$x = \frac{-1}{2}$

فكر
جد العدد الذي
زيادته على مربعه
أصغر ما يمكن.

ملاحظة

لايجاد معادلة المستقيم

نقطة (x_1, y_1) ميل m $y - y_1 = m(x - x_1)$

المشتقة = الميل

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

سؤال 17 صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12cm وذلك بقص أربع مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها فما هو الحجم الأعظم للعلبة ؟



الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$$V = (12 - 2x)(12 - 2x)(x)$$

$$V = (144 - 24x - 24x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

$$\bar{V} = 144 - 96x + 12x^2$$

$$[12x^2 - 96x + 144 = 0] \div 12$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \quad \text{تحريه}$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

$$\text{أ} \quad x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \quad \text{يُصل}$$

$$\text{ب} \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$V = (12 - 2x)(12 - 2x)(x)$$

$$V = (12 - 2(2))(12 - 2(2))(2)$$

$$V = (8)(8)(2)$$

$$V = 128 \text{ cm}^3 \quad \text{الحجم الأعظم للعلبة}$$

* $x = 6$ يُهمل لأن عنده الحجم سوف يكون صفراً.

موضوع معادلة 2 في 1

$$A = \frac{1}{2} (x - y)$$

$$A = \frac{1}{2} (8x + 6y)$$

$$A = 4x + 3y \Rightarrow \text{علاقة صينية}$$

$$\bar{A} = 4 + 3 \bar{y}$$

$$4 + 3 \bar{y} = 0 \Rightarrow [3 \bar{y} = -4] + 3$$

$$\bar{y} = \frac{-4}{3} \quad \therefore m = \frac{-4}{3}$$

$$(6, 8) \quad m = \frac{-4}{3}$$

$$y - y_1 = m (x - x_1) \quad \text{قانون الميل}$$

$$\left[y - 8 = \frac{-4}{3} (x - 6) \right] * 3$$

$$3y - 24 = -4x + 24$$

$$4x + 3y - 48 = 0$$

تحذير هام جداً

المطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مسجلة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات يعاقب هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهلنا وفق القانون العرفي المرقم 21 لسنة 1957 والمعدل برقم 80 في سنة 1994 والمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع الممنوعة المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما يصدر من مطبعة هو جهد واجتهاد شخصي من الأستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر أي جزء منها.

لذا يقتضي التنويه والتحذير

سؤال 18

خزائن على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فإن كانت مساحة البعد المستخدم في صناعته 108cm^2 جد أبعاد الخزائن لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن عليها أن الخزائن ذو غطاء كامل.

تكملة الحل

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} (54 - 6x^2) \\ \left[\frac{2}{3} (54 - 6x^2) = 0 \right] \cdot \frac{3}{2} \\ 54 - 6x^2 &= 0 \Rightarrow [54 = 6x^2] \div 6 \\ x^2 &= 9 \Rightarrow \text{بالجذر} \Rightarrow x = 3 \quad \text{نعوضها في 2} \\ h &= \frac{54 - 2(3)^2}{3(3)} = \frac{54 - 18}{9} = \frac{36}{9} \\ h &= 4 \text{ cm} \quad \text{الارتفاع} \\ 2x &= \text{طول القاعدة} \\ 6 \text{ cm} &= \text{طول القاعدة} \end{aligned}$$



$h =$ نرض ارتفاع الخزائن
 $x =$ نرض عرض القاعدة
 $2x =$ طول القاعدة

حجم متوازي السطوح المستطيلة = الطول \times العرض \times الارتفاع

$$V = (2x) \cdot (x) \cdot (h)$$

$$V = 2x^2 \cdot h \quad \dots \dots \dots \text{"القاعدة"}$$

$$A = 2(2x + x) \cdot h + (2x)(x) \cdot 2$$

$$A = 6x \cdot h + 4x^2$$

$$[108 = 6x \cdot h + 4x^2] \div 2$$

$$54 = 3x \cdot h + 2x^2$$

$$[54 - 2x^2 = 3xh] \div 3x$$

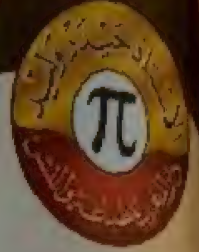
$$h = \frac{54 - 2x^2}{3x} \quad \dots \dots \dots \text{"العلاقة"} \quad \text{2} \quad \text{نعوض العلاقة في القاعدة}$$

$$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow V = 2x^2 \cdot \frac{54 - 2x^2}{3x}$$

$$V = \frac{2}{3} (54x - 2x^3) \quad \text{الدالة}$$

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

Nots:



المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

Nots:



المُسْنَد حيدر وليد

المُسْنَد فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



2021

4

التكامل

الفصل الرابع

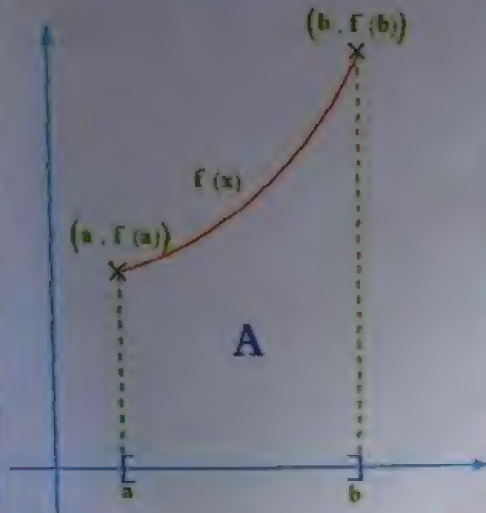
الأحيائي و التطبيقي

07702729223

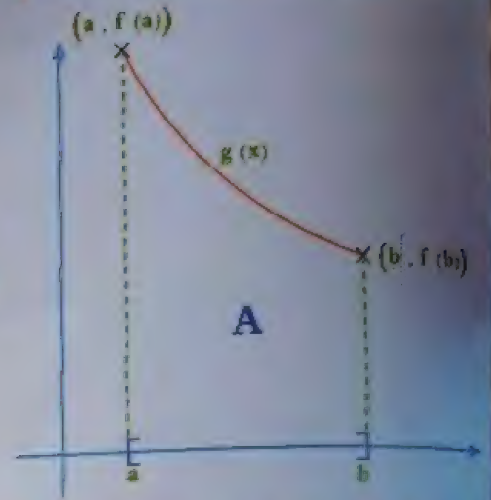


ملازم دار المغرب

ملاحظة :- من صفحة 139 الى صفحة 147 (خاص بالتطبيقي)

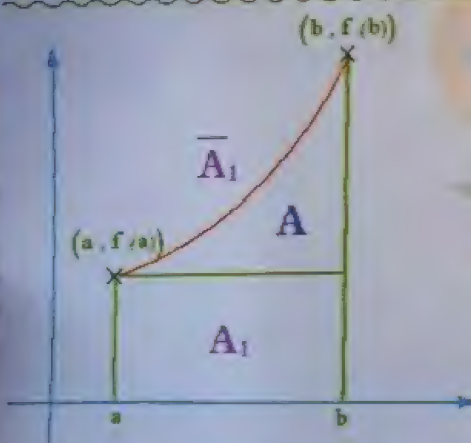


خاص
بالتطبيقي
2021

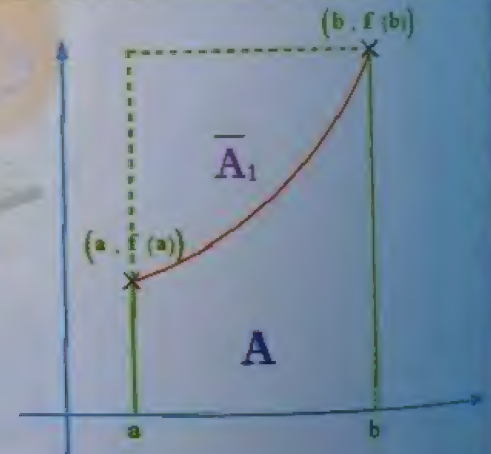


الدالة $f(x)$ متزايدة ضمن الفترة المغلقة $[a, b]$
وهذا يعني $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ ولا توجد
نقطة حرجة.

الدالة $g(x)$ متناقصة ضمن الفترة المغلقة $[a, b]$
وهذا يعني $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ ولا توجد
نقطة حرجة.



خاص
بالتطبيقي
2021



A_1 أكبر مستطيل ممكن رسمه خارج المنطقة A وتحت المنحني.

\bar{A}_1 أصغر مستطيل ممكن رسمه خارج المنطقة A وفوق المنحني.

ملاحظة
لحساب مساحة منطقة مستوية A محصورة بين منحنى دالة ومحور السينات ضمن فترة محددة
عبر قبة المساحة A_1 والتي تساوي مساحة أكبر مستطيل داخل المنطقة A وتحت المنحني ومساحة
المنطقة \bar{A}_1 والتي تساوي مساحة أصغر مستطيل خارج المنطقة A وفوق المنحني ويكون:

$$A = \frac{A_1 + \bar{A}_1}{2}$$

حيث A_1 المساحة تحت المنحني
 \bar{A}_1 المساحة فوق المنحني

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث

مثال

$$A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, y = x^2 + 1\}$$

$$x=1 \quad y=2 \quad (1,2)$$

$$x=4 \quad y=17 \quad (4,17)$$

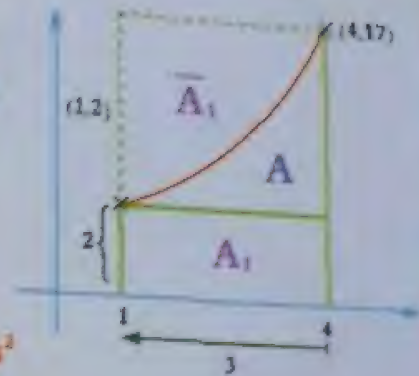


مساحة المنطقة A_1 تحت المنحنى

$$= (3)(2) = 6 \text{ unites}^2$$

مساحة المنطقة \bar{A}_1 فوق المنحنى

$$= 3(17) = 51 \text{ unites}^2$$



يمكن الحصول على دقة أكبر في حساب المساحة A وذلك بزيادة عدد المستطيلات داخل المنطقة A وخارجها ويتم ذلك من خلال تجزئة الفترة بالجزئ σ كما في الأمثلة التالية:

ملاحظة

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث

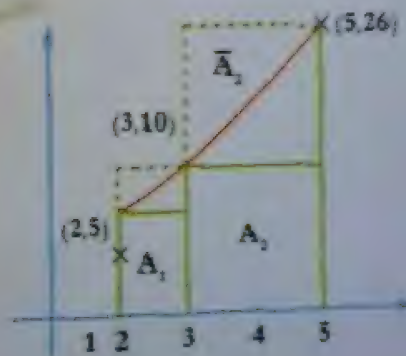
مثال

$$\sigma = (2,3,5) \quad A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 5, y = x^2 + 1\}$$

$$x=2 \Rightarrow y=5$$

$$x=3 \Rightarrow y=10$$

$$x=5 \Rightarrow y=26$$



m

$$\begin{aligned} \text{مجموع مساحات المناطق المستطيلة تحت المنحنى} &= A_1 + A_2 \\ &= (1 \times 5) + (2 \times 10) = 5 + 20 = 25 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

M

$$\begin{aligned} \text{مجموع مساحات المناطق المستطيلة فوق المنحنى} &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \\ &= (1 \times 10) + (2 \times 26) = 10 + 52 = 62 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

$$\text{المساحة} = \frac{25 + 62}{2} = 43 \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

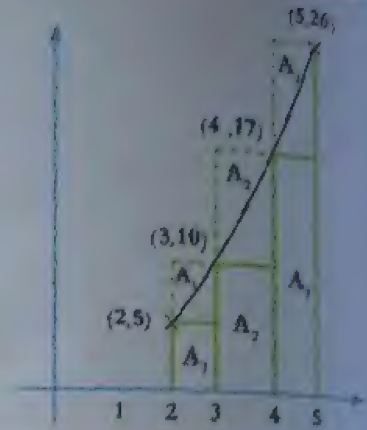
أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث

$$A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 5, y = x^2 + 1\}, \sigma = (2, 3, 4, 5)$$

$$\begin{aligned} m &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= 5 + 10 + 17 \\ &= 32 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 \\ &= 10 + 17 + 26 \\ &= 53 \text{ unit}^2 \end{aligned}$$

$$A \text{ المساحة} = \frac{m + M}{2} = \frac{32 + 53}{2} = 42 \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$



المجاميع العليا والمجاميع السفلى

المجاميع السفلى ويرمز لها $L(\sigma, f)$ وتساوي مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل المنطقة (تحت المنحني).

المجاميع العليا ويرمز لها $U(\sigma, f)$ وتساوي مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل المنطقة (فوق المنحني).

بالمكان الآت حساب المساحات وذلك بإيجاد $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$ حيث

$$A = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$$

ويتم ذلك بعمل جدول مؤلف من الحقول التالية:

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
---------	------------	-------	-------	----------------	----------------

لتكن $f(x) = 5 - 2x$ حيث $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

فأفان $\sigma = (0, 1, 3, 5)$ فوجد المجموع الأسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الأعلى $U(\sigma, f)$

∴ الدالة متناقصة ولاتوجد نقطة حرجة $f'(x) = -2 < 0$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[0, 1]$	1	3	5	3	5
$[1, 3]$	2	-1	3	-2	6
$[3, 5]$	2	-5	-1	-10	-2

$$L(\sigma, f) = -9 \quad U(\sigma, f) = 9$$

المساحات دائياً موجبة ولا يمكن ان تكون سالبة. وعليه في المثال السابق
إذا اردنا إيجاد المساحة فالقيم السالبة في الحقلين $U(\sigma, f)$ و $L(\sigma, f)$
نجمع موجبة مثلاً -2- نجمع 2 و -10- نجمع 10

مهمة

إذا كانت $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - x^2$ وذلك باستخدام أربعة تجزيات منتظمة.
أوجد $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$

مثال

$$f(x) = 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [1, 2]$$

$$f(x) = 2 \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \quad f(2) = 2$$

الحل

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
[0, 1]	1	0	2	0	2
[1, 2]	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
[2, 3]	1	0	2	0	2
[3, 4]	1	-4	0	-4	0
				-2	$6\frac{1}{4}$ المجموع

$$\therefore L(\sigma, f) = -2 \quad U(\sigma, f) = 6\frac{1}{4}$$

خاص
بالتطبيقي
2021

تمارين (4-1)

خاص
بالتطبيقي
2021

أوجد كل من $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$ إذا كانت

سؤال 1

$f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$ مقسماً الفترة الى ثلاث فترات جزئية منتظمة.

الحل

\therefore الدالة متناقصة ولا توجد نقطة حرجة $f'(x) = -1 < 0$

الفترات	طول الفترة	mi	Mi	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
[-2, -1]	1	4	5	4	5
[-1, 0]	1	3	4	3	4
[0, 1]	1	2	3	2	3
				9	12 المجموع

$$\therefore L(\sigma, f) = 9 \quad U(\sigma, f) = 12$$

التكامل
السادس
التطبيقي

2

أوجد كل من $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$ إذا كانت
 $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$ حيث
 $\sigma = (1, 2, 3, 5)$ إذا كانت

$$\bar{f}(x) = 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	3	4	3	4
$[2, 3]$	1	3	4	3	4
$[3, 5]$	2	-5	3	-10	6
				-4	14

الحل

$$\therefore L(\sigma, f) = -4 \quad U(\sigma, f) = 14$$

في هذا السؤال النقطة الحرجة عند $x = 2$ تقع عند أطراف الفترة لذا لا يؤثر ذلك في لا
 نعتبرها أي شيء.

جد $U(\sigma, f)$, $L(\sigma, f)$

$$f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 + 2x \quad \text{حيث}$$

استخدم ثلاث جزيئات متساوية (b)

$$(a) \sigma = (1, 2, 4)$$

$$\bar{f}(x) = 6x + 2 = 0 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \notin [1, 4]$$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	5	16	5	16
$[2, 4]$	2	16	56	32	112
				37	128

$$\therefore L(\sigma, f) = 37 \quad U(\sigma, f) = 128$$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	5	16	5	16
$[2, 3]$	1	16	33	16	33
$[3, 4]$	1	33	56	33	65
				54	105

$$\therefore L(\sigma, f) = 54 \quad U(\sigma, f) = 105$$

التكامل المحدد

إذا كانت $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإنه يوجد عدد وحيد مثل k حيث $L(\sigma, f) \leq k \leq U(\sigma, f)$ يسمى العدد k بالتكامل المحدد للدالة f على الفترة المغلقة $[a, b]$

ونرمز له $\int_a^b f$ حيث a, b حدي التكامل أي ان التكامل المحدد يعطي ناتج عددي يمثل

$$k = \int_a^b f = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} \text{ مساحة أي أن}$$

ليكن $f(x) = 2x - 3$ حيث $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ أوجد $\int_2^5 f$ وتحقق هندسياً من الناتج

مثال

الحل: \therefore الدالة متزايدة ولا توجد نقطة حرجية $\bar{f}(x) = 2 > 0$

الحل

الطريقة الأولى

الفترة	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[2, 3]$	1	1	3	1	3
$[3, 4]$	1	3	5	3	5
$[4, 5]$	1	5	7	5	7
				9	15 = المجموع

خاص بالتطبيقي
2021

$$\therefore \int_2^5 f = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{9 + 15}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ وحدة مربعة}$$

الطريقة الثانية (التحقق هندسياً)

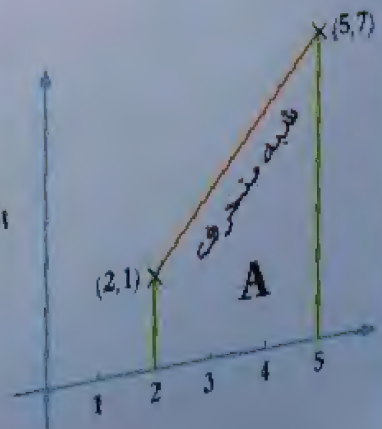
$$x=2 \Rightarrow y=2(2)-3=1 \quad (2,1)$$

$$x=5 \Rightarrow y=2(5)-3=7 \quad (5,7)$$

الارتفاع (مجموع القاعدتين المتوازيتين) $= \frac{1}{2}$ مساحة شبه المنحرف

$$A = \frac{1}{2}(1+7) \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12 \text{ unit}^2$$

خاص بالتطبيقي
2021

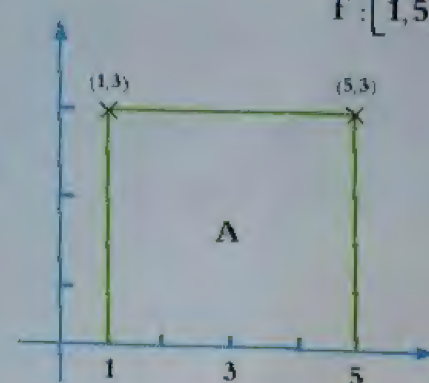


التكامل

السادس
التطبيقي

2

لنكن $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 3$



الطريقة الاولى

اوجد $\int_1^5 f$

المساحة $A = \text{الطول} \times \text{العرض}$
 المساحة $A = (4) (3) = 12 \text{ unit}^2$

الطريقة الثانية

خاص
بالتطبيقي
حذرت
2021

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 3]$	2	3	3	6	6
$[3, 5]$	2	3	3	6	6
				12	12

$$\therefore \int_1^5 f = \int_1^5 3 dx = \frac{12 + 12}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ unit}^2$$

تمارين (4-2)

اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x} dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3)$

الدالة f متناقصة $\bar{f}(x) = \frac{x(0) - 3(1)}{x^2} = \frac{-3}{x^2} < 0$

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
$[2, 3]$	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
				$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$

$$\therefore \int_1^3 \frac{3}{x} dx = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{14}{2} = \frac{7}{2} \text{ unit}^2$$

خاص
بالتطبيقي
حذرت
2021

لنكن $f(x) = 3x - 3$ حيث $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$

سؤال 2

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 f$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3, 5)$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحنى f

متزايدة $\bar{f}(x) = 3 > 0$

الحل

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[1, 2]$	1	0	3	0	3
$[2, 3]$	1	3	6	3	6
$[3, 5]$	2	6	12	12	24
				15	33 = المجموع

$$\therefore \int_1^5 f = \int_1^5 (3x - 3) dx \approx \frac{15 + 33}{2} = 24 \text{ unit}^2$$

$$f(1) = 3(1) - 3 = 0$$

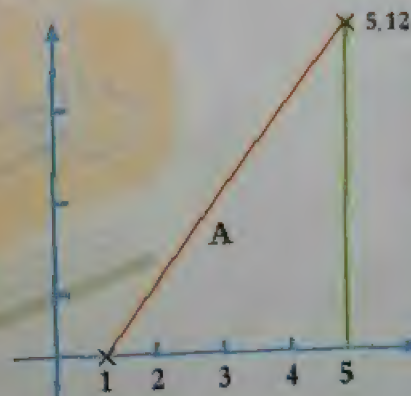
$$(1, 0)$$

$$f(5) = 3(5) - 3 = 12$$

$$(5, 12)$$

مثلث $A = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$$A = \frac{1}{2} (4)(12) = 24 \text{ unit}^2$$



الحل هندسياً

خاص بالتطبيقي

2021

أوجد التكامل $\int_2^4 f = (3x^2 - 3) dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2, 3, 4)$

سؤال 3

$$\bar{f}(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [2, 4]$$

الحل

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[2, 3]$	1	9	24	9	24
$[3, 4]$	1	24	45	24	45
				33	48 = المجموع

$$\therefore \int_2^4 (3x^2 - 3) dx = \frac{33 + 48}{2} = 40.5 \text{ unit}^2$$

السادس
التطبيقي

التكامل

أوجد قيمة تقديرية للتكامل $\int_1^5 f(x) dx$ حيث $f(x) = -4$

سؤال 4

لتكن $\sigma = (-3, 0, 2)$

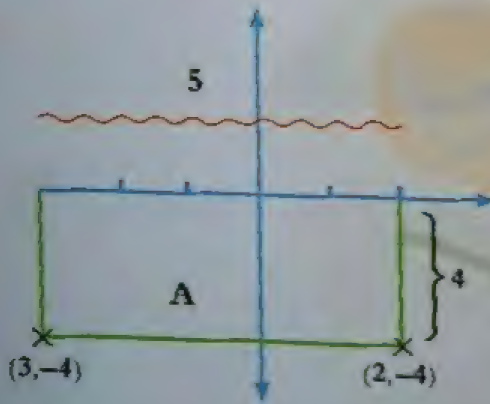
الحل

الفترات	طول الفترة	m_i	M_i	$L(\sigma, f)$	$U(\sigma, f)$
$[-3, 0]$	3	-4	-4	-12	-12
$[0, 2]$	2	-4	-4	-8	-8
				20	20

المجموع = 20

$$\therefore \int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^2 -4 dx = \frac{20 + 20}{2} = 20 \text{ unit}^2$$

(الطريقة هندسية)



$$A = \int_{-3}^2 f(x) dx = \text{مساحة المنطقة المستطيلة}$$

$$= \text{العرض} \times \text{الطول}$$

$$= 4 \times 5 =$$

$$= 20 \text{ unit}^2$$

خاص
بالتطبيقي

2021

قبل أن تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالهواتف او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء المزرمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (غير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الافعال . علما ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحانسة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتخليم الصناعي وتأكد واحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي المرقم (٢٦) لسنة (١٩٥٢) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف .
لذا اقتضى التنويه والتحذير



النظرية الأساسية للتكامل / الدالة المقابلة

التكامل

هو عملية عكس الاشتقاق أو عملية ارجاع المشتقة الى الدالة الاصلية او يعرف
كما يلي:

إذا كانت f مستمرة على الفترة $[a, b]$ فإنه يوجد دالة مثل F مستمرة على الفترة $[a, b]$ بحيث

$$\bar{F}(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = f(b) - f(a) \quad \text{ويكون}$$

وتسمى F دالة مقابلة للدالة f على الفترة $[a, b]$

ملاحظة

تكون F دالة مقابلة للدالة f إذا كانت $\bar{F}(x) = f(x)$

مثال

إذا كانت $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$

وكانت $F: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2$

إثبت ان F هي دالة مقابلة للدالة f وجد $\int_1^2 f$

الحل

$$\bar{F}(x) = 2x = f(x)$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f

$$\int_1^2 f = [F(x)]_1^2 = [x^2]_1^2 = 4 - 1 = 3$$



ملاحظة

- بفصل دراسة هذه البوابة نجد قواعد التكامل من (153) إلى من (172) ثم البدء بهذا الموضوع.
- عندما يطلب في السؤال أن الدالة $f(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ يجب أن نتبع ما يلي:
 - أولاً، نثبت استمرارية الدالة $f(x)$ على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلية الاشتقاق على الفترة المفتوحة الدالة يكون ناتج التكامل هو الدالة (a, b) .
 - ثانياً، نشتق الدالة $F(x)$ أي نجد فإذا كان $\leftarrow F(x) = f(x)$ تكون F مقابلة للدالة f .

باختصار، عند اشتقاق الدالة $F(x)$ يكون ناتج الاشتقاق هو الدالة $f(x)$ وعند تكامل الدالة $F(x)$ يكون ناتج التكامل هو الدالة $f(x)$.

مثال 1

أثبت فيما إذا كانت $F(x) = x^3 + 2$ ، $F: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$.

أولاً، الدالة $F(x)$ مستمرة على الفترة المغلقة $[1, 3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(1, 3)$ لأنها كثيرة الحدود.

ثانياً،

$$\begin{cases} F(x) = x^3 + 2 \\ F'(x) = 3x^2 \\ F'(x) = f(x) \end{cases} \quad \text{انظر إلى اشتقاق } F(x) \text{ كان ناتج اشتقاق الدالة } f(x).$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة على $[1, 3]$

مثال 2

أثبت أن الدالة $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ، $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مقابلة للدالة

$$f(x) = \cos 2x \quad \text{ثم جد } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$$

أولاً، الدالة $F(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ثانياً،

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \sin 2x \\ F'(x) &= \frac{1}{2} \cos 2x \cdot (2) \\ F'(x) &= \cos 2x \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f

توضيح

دالة $\sin x$ ، $\cos x$ وهي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق كما مر علينا في الصف الخامس.



هي دالة مقابلة للدالة

(تكمال f هو يعاوي الدالة)

ملاحظة

إذا أعطى دالة ليست كثيرة الحدود والفترة $[a, b]$ وليست \mathbb{R} بحيث ان تثبت الاستمرارية للدالة بطريقة أخذ صورة لعنصر من العناصر الفترة مثل a وغاية b $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ كما في المثال التالي.

مثال 2

المثال 2: الدالة $F(x)$ مقابلة للدالة $f(x)$ ثم جد

$$F(x) = \sin x + x, \quad F: \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 1 + \cos x, \quad f: \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx \quad \text{ثم احسب}$$

أولاً، نثبت استمرارية الدالة عند $\forall a \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

وكذلك قابلة للإشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

$$F(x) = \sin x + x \Rightarrow \bar{F}(x) = \cos x + 1$$

$$\bar{F}(x) = f(x)$$

F مقابلة للدالة f

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos x) dx$$

$$= \left[x + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \right) - (0 + \sin 0)$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi + 3}{6}$$

$$F(x) = \sin x + x$$

$$f(a) = \sin a + a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x + x$$

$$= \sin a + a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

الصورة = الغاية

إذا كانت F دالة مستمرة على الفترة f بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f

مثال

فجد $\int_1^5 f(x) dx$

$$\int_1^5 f(x) dx = [F(x)]_1^5$$

$$= [3x^2]_1^5$$

$$= 3(5)^2 - 3(1)^2$$

$$= 75 - 3 = 72$$

في هذا السؤال لم يطلب إثبات بل ذكر

توضيح

بأن F مقابلة للدالة f لذلك فإن تكامل f هو دالة F كما في ملاحظة ص (1).

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ وأن الدالة مقابلة للدالة f هي

مثال

فوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ ، $F(x) = \sin x$ ، $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

$$F(x) = f(x)$$

خلاصة:

تكامل f يعطي F .

اشتقاق F يعطي f .

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار الشرف) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء المزمة مستنسخة وبمعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره تكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الافعال . علما ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتؤكد واحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي الرقم (٣١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٠٠٤ / ٤ / ٣٦ وللحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف .
لذا لفتني التنويه والتحذير

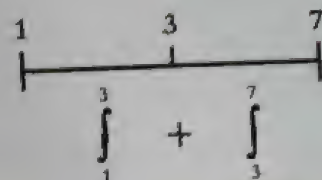


أسئلة من شمس

مثال 6 إذا كانت $\int_3^7 f(x) dx = 8$ ، $\int_1^3 f(x) dx = 5$ ، فأوجد $\int_1^7 f(x) dx$

$$\int_1^7 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx$$

$$= 5 + 8 = 13$$



مثال 7 $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2, 6]$ فإذا كانت $\int_1^6 f(x) dx = 6$ وكانت $\int_{-2}^1 f(x) dx$ جد $\int_{-2}^6 [f(x) + 3] dx = 32$

$$\int_{-2}^6 [f(x) + 3] dx = 32$$

$$\int_{-2}^6 f(x) dx + \int_{-2}^6 3 dx = 32$$

$$\int_{-2}^6 f(x) dx + [3x]_{-2}^6 + 32$$

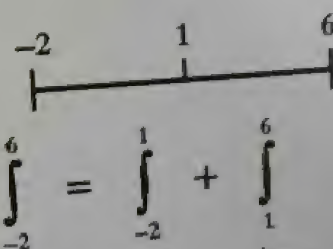
$$\int_{-2}^6 f(x) dx + [3(6) - 3(-2)] = 32$$

$$\int_{-2}^6 f(x) dx + 24 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^6 f(x) dx = 32 - 24$$

$$= 8$$

$$\int_{-2}^6 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^6 f(x) dx$$

$$8 = \int_{-2}^1 f(x) dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^1 f(x) dx = 2$$



معطى
مطلوب
نبحث عنه

أولاً: تكامل الثابت:

$$\int a \, dx = ax + c \Rightarrow \text{فقط نضيف متغير للثابت أما } x \text{ أو } y \text{ أو } t \text{ بحسب التكامل.}$$

① $\int 3 \, dx = 3x + c$ نضيف x لأن التكامل dx

② $\int -5 \, dx = -5x + c$ كذلك

③ $\int \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{2}x + c$ كذلك

④ $\int \frac{1}{3} \, dy = \frac{1}{3}y + c$ نضيف y لأن التكامل dy

⑤ $\int \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2}t + c$ نضيف t لأن التكامل dt

ثانياً: تكامل x^n (مرفوعة الى اس)

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

موجب
 سالب
 كسر
 ↗
 ↖
 ↘
 n (الأس)

- * عندما يكون الأس n عدد صحيح موجب نضيف للأس واحد ونقسم على الأس الجديد.
- * عندما يكون الأس n عدد صحيح سالب كذلك نضيف للأس واحد ونقسم على الأس الجديد ولكن هنا الأس سوف ينقص لأنه سالب ونضيف $(+1)$ تصبح طرح.

أمثلة توضيحية (أساسية) حول القاعدة القوية

① $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$
 نضيف للأس واحد $\rightarrow x^3$
 نقسم على الأس الجديد $\rightarrow 3$

② $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

③ $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$

④ $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$

⑤ $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c$
 $= x^3 + c$

⑥ $\int 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4} + c$
 $= x^4 + c$

⑦ $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$
 $= \frac{-1}{x} + c$

⑧ $\int x^{-8} dx = \frac{x^{-7}}{-7} + c$
 $= \frac{-1}{7x^7} + c$

⑨ $\int -5x^{-6} dx = \frac{-5x^{-5}}{-5} + c$
 $= \frac{1}{x^5} + c$

⑩ $\int -2x^{-7} dx = \frac{-2x^{-6}}{-6} + c$
 $= \frac{1}{3x^6} + c$

* إذا كانت أس x كسر نضيف (1) ثم نضرب في مقلوب الأس الجديد .

المقام + البسط

المقام

* **ملاحظة ذات صلة:** للتخلص من الجذر نتبع الطريقة التالية:

ما بداخل الجذر

مثلاً $\sqrt{x} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}$

مثلاً $\sqrt{2x+1} \Rightarrow (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

مثلاً $\sqrt[3]{x^5} \Rightarrow x^{\frac{5}{3}}$

مثلاً $\sqrt[3]{(x^2+1)^3} \Rightarrow (x^2+1)^{\frac{3}{3}}$

أمثلة توضيحية (أساسية)

① $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

② $\int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + c$

③ $\int x^{\frac{4}{5}} dx = \frac{5}{9} x^{\frac{9}{5}} + c$

④ $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$

نقوم بإرجاع الدالة جذر بعد إكمال التكامل مثلاً:

ملاحظة

⑤ $\int \sqrt{x^3} dx$
 $\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c$
 $= \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + c$

⑥ $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx \Rightarrow \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$
 $\int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{-2}{1} x^{-\frac{1}{2}} + c$
 $= \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$

أمثلة أساسية تخص القاعدتين الأولى والثانية

$$④ \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} \right) dx$$

$$\int \left(x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} \right) dx$$

$$= \frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{9}{5} \sqrt[3]{x^5} + c$$

$$⑤ \int \sqrt{x} (x+1)^2 dx$$

$$\int x^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x + 1) dx$$

$$\int \left[x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right] dx$$

$$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 2 \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7} \sqrt{x^7} + \frac{4}{5} \sqrt{x^5} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$① \int (2x+1) dx$$

$$= \frac{2x^2}{2} + x + c$$

$$= x^2 + x + c$$

$$② \int (x^{-2} + x - 3x^2) dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{3} + c$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - x^3 + c$$

$$③ \int (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}) dx$$

$$\int (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

ثالثاً: تكامل قوس مرفوع الى اس مضروب في مشتقة داخل القوس

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

عند تكامل قوس مرفوع الى اس يجب ان تكون مشتقة داخل القوس متوفرة وبعد توفر مشتقة داخل القوس نُهمل ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

$$\textcircled{1} \int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x \, dx = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + c$$

هذه

انظر الى مثال (1) تجد ان القوس $(x^2 + 1)$ مشتقة داخله $(2x)$ وهي متوفرة لذلك مباشرة نُهمل ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

$$\textcircled{2} \int 3(1 + 3x)^5 \, dx = \frac{(1 + 3x)^6}{6} + c$$

هذه

انظر الى المثال (2) تجد ان القوس مشتقة داخله هي (3) ومتوفرة لذلك مباشرة نُهمل ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار الغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء الملزمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبررة الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال ، علماً ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحاضرة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتأكد واحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصلة على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العربي برقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف .

تجديد عام جديد



ماذا لو كانت مشتقة داخل القوس غير ثابتة ؟

الحل

هناك احتمالات :

أولاً، نوفر مشتقة الداخل (داخل القوس) وذلك عن طريق ضرب وقسمة التكامل بثابت

ثم نهمل المشتقة ونضيف لأس القوس (1) ونقسم على الأس الجديد .

$$\int (\text{الثابت})^n dx = \frac{1}{\text{الثابت}} \int \text{الثابت} dx$$

مثلاً $\int (3x+1)^3 dx$

مشتقة داخل القوس (3) وهو ثابت غير موجود

لذلك نقوم بتوفير مشتقة داخل القوس .

$$\frac{1}{3} \int 3 (3x+1)^3 dx$$

تهمل

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^4}{4} + c$$

$$= \frac{1}{12} (3x+1)^4 + c$$

مثلاً $\int x(x^2+3)^2 dx \Rightarrow$

لاحظ المشتقة داخل القوس $2x =$ ولدينا x فقط

لذلك نحتاج (2) .

$$\frac{1}{2} \int 2x(x^2+3)^2 dx$$

تهمل مشتقة داخل قوس

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+3)^3}{3} + c$$

$$= \frac{1}{6} (x^2+3)^3 + c$$

$\int (x^2+3)^2 dx$

$\int (x^4+6x^2+9) dx$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + 9x + c$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x + c$$

ثانياً، لا يمكن توفير المشتقة لذلك نفتح القوس

هنا المشتقة $2x$ لا يمكن توفيرها لأننا نوفر

ثابت فقط ولا يمكن توفير متغير مثل x لذلك نفتح التربيع .

التكامل المحدد

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ فإنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a, b]$ بحيث:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

ويكون

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

الأكبر ← b
الأسفل ← a

قواعد التكامل المحدد هي نفسها القواعد السابقة لا توجد قواعد جديدة والاختلاف فقط في الخطوة الأخيرة حيث لا نضيف ثابت التكامل في التكامل المحدد وإنما نعوض حدود التكامل. نعوض الحد الأعلى ثم نضع الإشارة \ominus ثم نعوض الحد الأدنى.

مثلاً

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_1^2 2x dx &= \left[\frac{2x^2}{2} \right]_1^2 \\ &= [x^2]_1^2 \\ &= (2)^2 - (1)^2 = 3 \end{aligned}$$

الأعلى ← $(2)^2$
الأدنى ← $(1)^2$

مثلاً

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_0^1 (3x^2 - 2) dx &= [x^3 - 2x]_0^1 \\ &= [(1)^3 - 2(1)] - [(0)^3 - 2(0)] \\ &= 1 - 2 - 0 = -1 \end{aligned}$$

الأعلى ← $(1)^3 - 2(1)$
الأدنى ← $(0)^3 - 2(0)$

إذا جاءت حدود التكامل معكوسة (الأعلى أصغر من الأدنى) نقلب الحدود ونضع الإشارة \ominus قبل التكامل.

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_2^1 (x+2) dx &\Rightarrow -\int_1^2 (x+2) dx \\ &= -\left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \\ &= -\left[\left(\frac{2^2}{2} + 2(2) \right) - \left(\frac{1^2}{2} + 2(1) \right) \right] \\ &= -\left(6 - \frac{1}{2} - 2 \right) = -3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

حالات تكامل الدوال الجبرية

أولاً: لا يوجد في التكامل قاعدة لحاصل ضرب دالتين لذلك عند تكامل قوسين بينهما حاصل ضرب () () نوزع الأقواس ثم نجري التكامل.

التمويض

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{(4)^4}{4} - \frac{3(4)^2}{2} - 2(4) \right] - \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{3(1)^2}{2} - 2(1) \right] \\ &= (64 - 24 - 8) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 \right) \\ &= 32 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{34}{1} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{136 - 1 + 6}{4} = \frac{141}{4} \end{aligned}$$

مثال 1 جد: $\int (3x-1)(x+3) dx$

توزيع القوسين $\int (3x^2 + \frac{9x-x-3}{\text{طرح}}) dx$

$$\int (3x^2 + 8x - 3) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{3}} + \frac{8x^2}{2} - 3x + c \rightarrow \text{عملية التكامل} \\ &= x^3 + 4x^2 - 3x + c \end{aligned}$$

مثال 3 جد قيمة:

$$\int_0^1 \sqrt{x} (\sqrt{x} + 2)^2 dx$$

* هنا يجب ان نفتح التربيع لأن مشتقة

داخل القوس $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ولا يمكن توغيرها.

* استفد من ملاحظة (ثانياً) ص 1.

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (x + 4\sqrt{x} + 4) dx$$

$$\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}}) dx$$

مثال 2 جد: $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2 dx$

مربع حدانية

$$\int_1^4 (x-2)(x^2 + 2x + 1) dx$$

توزيع القوسين $\int_1^4 (x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2) dx$

$$\int_1^4 (x^3 - 3x^2 - 2x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{2} - 2x \right]_1^4 \quad \text{عملية التكامل}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{4x^2}{2} + 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\
 &= \left[\frac{2}{5} \sqrt{x^5} + 2x^2 + \frac{8}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^1 \\
 &= \left[\frac{2}{5} \sqrt{(1)^5} + 2(1)^2 + \frac{8}{3} \sqrt{(1)^3} \right] - [0] \\
 &= \frac{2}{5} + \frac{2}{1} + \frac{8}{3} \\
 &= \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}
 \end{aligned}$$

ثانياً، إذا كانت لدينا بسط ومقام قابل للتحويل نحلل ثم نختصر وبعد ذلك نجري عملية التكامل.

$$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1} dx$$

أوجد:

مثال 5

(2018) تمهيد / أحياني

$$= \int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int_2^3 (x^2+x+1) dx$$

$$= - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_2^3$$

$$= - \left[\left(\frac{(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 3 \right) - \left(\frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} + 2 \right) \right]$$

$$= - \left[\left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2 \right) \right]$$

$$= - \left[\left(9 + \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 + 2 \right) \right]$$

$$= - \left(\frac{12}{1} + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} - \frac{4}{1} \right)$$

$$= - \left(\frac{72+27-16-24}{6} \right) = - \frac{59}{6}$$

$$\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1} dx$$

أوجد:

مثال 4

$$= \int_2^3 \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int_2^3 \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int_2^3 (x^2+1)(x+1) dx$$

$$= \int_2^3 (x^3+x^2+x+1) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_2^3$$

$$= \left[\frac{(3)^4}{4} + \frac{(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 3 \right] - \left[\frac{(2)^4}{4} + \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} + 2 \right]$$

$$= \left(\frac{81}{4} + \frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2 \right)$$

$$= \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} + 9 + 3 \right) - \left(4 + \frac{8}{3} + 2 + 2 \right)$$

$$= \frac{81}{4} + \frac{9}{2} + \frac{12}{1} - \frac{8}{3} - \frac{8}{1} = \frac{313}{12}$$

$$\int \frac{y^4 - y}{y^2 + y + 1} dy$$

$$\int \frac{y(y^3 - 1)}{y^2 + y + 1} dy$$

$$\int \frac{y(y-1)(y^2+y+1)}{(y^2+y+1)} dy$$

$$\int y(y-1) dy$$

$$\int (y^2 - y) dy \quad \text{نجزّي التكامل}$$

$$= \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + c \quad \text{الناتج}$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx$$

مثال 6 جد:

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} dx \quad \text{تحليل واختصار}$$

$$\int (\sqrt{x} + 1) dx \xrightarrow{\text{تعديل}} \int (x^{\frac{1}{2}} + 1) dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x + c \quad \text{نجزّي التكامل}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + x + c \quad \text{الناتج}$$

تحذير هام جداً

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الأنترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكّر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

$$\int \frac{x^2 - x}{\sqrt{x-1}} dx$$

مثال 7 جد:

$$\int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x-1}} dx \Rightarrow \int \frac{x(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1})} dx$$

$$\int x(\sqrt{x} + 1) dx \Rightarrow \int x(x^{\frac{1}{2}} + 1) dx$$

$$\int (x^{\frac{3}{2}} + x) dx$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + \frac{1}{2} x^2 + c$$



احسب التكامل:

مثال 12

$$\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2} dx$$

$$\int \frac{4x^4-12x^2+9-9}{x^2} dx$$

$$\int \frac{x^2(4x^2-12)}{x^2} dx$$

$$\int (4x^2-12) dx$$

$$= \frac{4x^3}{3} - 12x + c$$



فكر

حاول حل المثال بطريقة أخرى.

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

احسب:

مثال 13

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} dx$$

مشتقة الداخل

$$\int \frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -2 \int \frac{1(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{-2\sqrt{x}} dx$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) (1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -\frac{4}{3} \sqrt{(1-\sqrt{x})^3} + c$$

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{-\frac{2}{4}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

توضيح

جد التكامل التالي:

مثال 10

$$\int \frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-3\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{x} & \sqrt{x} & 3\sqrt{x} \end{array} \quad \sqrt{x} \text{ عامل مشترك}$$

$$\int \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} dx$$

$$2 \int \frac{1(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}} dx$$

القوس $(\sqrt{x}-2)$ قوس مرفوع إلى أس مشتقة داخل

لدينا $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ نحتاج (2) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\cancel{2}} + c$$

$$= (\sqrt{x}-2)^2 + c$$

جد التكامل التالي:

مثال 11

$$\int \frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2+3} dx$$

$$\int \frac{(x^3-x^2)+(3x-3)}{(x^2+3)} dx$$

عامل مشترك

$$\int \frac{x^2(x-1)+3(x-1)}{(x^2+3)} dx$$

$$\int \frac{(x-1)[x^2+3]}{(x^2+3)} dx$$

$$\int (x-1) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + c$$



ثالثاً، إذا كانت لدينا قوس مرفوع الى اس نوفر مشتقة داخل القوس ثم نكامل وان القوس المرفوع الى اس في الحقام نرفعه للبسط ونغير اشارة الأس.

مثال 16 جد: $\int x (x^2 + 1)^{\frac{1}{4}} dx$

مباشرة نوفر مشتقة داخل القوس (2x)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int 2x (x^2 + 1)^{\frac{1}{4}} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{7}{4}} + c \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[4]{(x^2 + 1)^7} + c \end{aligned}$$

1 د / 2007

مثال 17 جد: $\int x (x^2 + 3)^3 dx$

مباشرة نوفر مشتقة داخل القوس (2x)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int 2x (x^2 + 3)^3 dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 3)^4}{4} + c \\ &= \frac{1}{8} (x^2 + 3)^4 + c \end{aligned}$$

1 د / 2003

مثال 18 جد: $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$

1 د / 2009

$$\begin{aligned} \int x (x^2 + 1)^{-2} dx &\Rightarrow \frac{1}{2} \int 2x (x^2 + 1)^{-2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{-1}}{-1} \right]_0^1 = \left[\frac{-1}{2(x^2 + 1)} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{-1}{2(1^2 + 1)} \right) - \left(\frac{-1}{2(0^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-1 + 2}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

مثال 14 جد: $\int \frac{1}{(5-2x)^2} dx$

نرفع القوس ونغير الاشارة

$$\begin{aligned} & \int (5-2x)^{-2} dx \\ & \text{نعمل} \\ & \frac{1}{-2} \int -2 (5-2x)^{-2} dx \\ &= \left[\frac{-1}{-2} \cdot \frac{(5-2x)^{-1}}{-1} \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{1}{2(5-2x)} \right]_1^2 \end{aligned}$$

1 د / 2006

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(5-2(2))} - \frac{1}{2(5-2(1))} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

مثال 15 جد: $\int \frac{dx}{(3x-4)^2}$

نرفع القوس ونغير الاشارة

$$\begin{aligned} & \int (3x-4)^{-2} dx \\ & \frac{1}{3} \int 3 (3x-4)^{-2} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-4)^{-1}}{-1} \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{-1}{3(3x-4)} \right]_1^2 \end{aligned}$$

2 د / 2008

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{-1}{3(3(2)-4)} \right) - \left(\frac{-1}{3(3(1)-4)} \right) \\ &= \frac{-1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{-1-2}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

جد:

مثال 20

نفس الحل السابق فقط تغيير حدود التكامل.

$$= \left(\frac{1}{3} \right)$$

2 د / 2003

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

جد:

مثال 19

الرباع يحلل $(3-2x)(3-2x) = (3-2x)^2$ مربع كامل

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-2x)^2} \Rightarrow \int_{-1}^1 (3-2x)^{-2} dx$$

نوع مشتقة داخل القوس (-2)

$$\frac{1}{-2} \int_{-1}^1 -2 (3-2x)^{-2} dx$$

2 د / 2003

$$= \left[\frac{1}{-2} \cdot \frac{(3-2x)^{-1}}{-1} \right]_{-1}^1$$

$$= \left[\frac{1}{2(3-2x)} \right]_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{1}{2(3-2(1))} \right) - \left(\frac{1}{2(3-2(-1))} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{5-1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

رابعاً: تكامل الدالة الجبرية التي تحتوي على جذر: لها ثلاث حالات:

الأولى: أن يحتوي الجذر على عامل مشترك ويكون العامل المشترك عادلاً يعطوي دليل الجذر.

$$\text{مثلاً: } \sqrt[3]{x^5 - 3x^3} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3(x^2 - 3)}$$

* يوجد عامل مشترك وهو x^3 أس x هو 3 دليل الجذر

الاحصائي
التطبيقي

التكامل

$$\int_{-1}^1 \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5} dx$$

مثال 22 جد قيمة:

$$\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)} dx$$

2004 / د 2

$$\int_{-1}^1 x(3-2x^2)^{\frac{1}{3}} dx$$

2015 / خارج القطر

مشتقة داخل قوس $-4x =$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 -4x(3-2x^2)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= \left[\frac{-1}{4} \cdot \frac{3}{4} (3-2x^2)^{\frac{4}{3}} \right]_{-1}^1$$

$$= \left[\frac{-3}{16} \sqrt[3]{(3-2x^2)^4} \right]_{-1}^1$$

$$= \left[\frac{-3}{16} \sqrt[3]{(3-2(1)^2)^4} \right] - \left[\frac{-3}{16} \sqrt[3]{(3-2(-1)^2)^4} \right]$$

$$= \frac{-3}{16} \sqrt[3]{(3-2)^4} + \frac{3}{16} \sqrt[3]{(3-2)^4}$$

$$= \frac{-3}{16} (1) + \frac{3}{16} (1) = 0$$

$$\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}} \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}} dx$$

مثال 21 جد قيمة:

$$\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}} dx$$

2009 / د 2

$$\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} (x+1)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$\int_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}} (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx$$

قوس مرفوع الى اس والبشتقة = 1

$$= \left[\frac{2}{1} (x+1)^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}}$$

$$= \left[2\sqrt{x+1} \right]_{\frac{3}{8}}^{\frac{8}{3}}$$

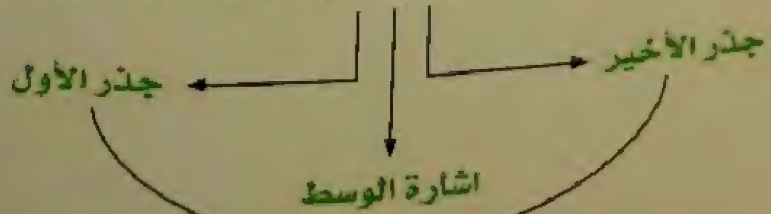
$$= (2\sqrt{8+1}) - (2\sqrt{3+1})$$

$$= 2(\sqrt{9}) - 2(\sqrt{4})$$

$$= 6 - 4 = 2$$

الثابة ♦ ان يكون داخل الجذر مربع كامل:

1 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$



2 $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^4 - 4x^2 + 4}} dx$$

احسب:

مثال 24

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 2)^2}} dx \Rightarrow \int \frac{x}{(x^2 - 2)^{\frac{2}{3}}} dx \Rightarrow \int x (x^2 - 2)^{-\frac{2}{3}} dx$$

$$\frac{1}{2} \int 2x (x^2 - 2)^{-\frac{2}{3}} dx$$

مشتقة داخل القوس = $2x$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} (x^2 - 2)^{\frac{1}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2 - 2)^1} + c$$

ملاحظة: ان يكون داخل الجذر حدودية لا تحتوي عامل مشترك ولا تحلل مربع كامل لذلك نتخلص منها مباشرة.

$$\int_4^8 x \sqrt{x^2 - 15} dx$$

جد:

مثال 25

$$\int_4^8 x (x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx$$

مشتقة داخل

القوس = $2x$

$$\frac{1}{2} \int_4^8 2x (x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 - 15)^{\frac{3}{2}} \right]_4^8$$

$$= \left[\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 15)^3} \right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(8^2 - 15)^3} - \frac{1}{3} \sqrt{(4^2 - 15)^3}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{49^3} - \frac{1}{3} \sqrt{1^3}$$

15/1999

$$= \frac{343}{3} - \frac{1}{3} = \frac{343}{3} = 114$$

$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$

جد:

مثال 26

$$\int_0^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}} dx$$

2008 / تمويدي

$$= \left[\frac{3}{2} (x+1)^{\frac{2}{3}} \right]_0^7$$

$$= \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} \right]_0^7$$

$$= \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(7+1)^2} \right] - \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(0+1)^2} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{64} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1}$$

$$= \frac{3}{2} (4) - \frac{3}{2} (1)$$

$$= \frac{6}{1} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{12-3}{2} = \frac{9}{2}$$

المستند في الرياضيات

خامساً، عندما نجري خطوات التكامل ونواجه قوسين أحدهما مرفوع إلى أس وكلاهما ليس مشتقة الآخر أي أن المشتقة لا تتوفر نقوم بمساواة ما بداخل الأقواس ونضرب الأقواس (عند الضرب تجمع الأسس) ويصبح قوس واحد مرفوع إلى أس.

مثال 27 جد التكامل: $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x-2}} dx$

$\int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{2}}} dx$
 نساوي الداخل بسحب عامل مشترك
 ليصبح قوس مرفوع إلى أس.

$3 \int (x-2)(x-2)^{-\frac{1}{2}} dx$

$3 \int (x-2)^{\frac{1}{2}} dx$

$= 3 \cdot \frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{9}{5} \sqrt{(x-2)^5} + c$

2 د / 2015

مثال 28 جد التكامل: $\int \frac{x-3}{(2x-6)^3} dx$

$\int (x-3)(2x-6)^{-3} dx$

نساوي داخل الأقواس ثم نضرب الأقواس لتصبح قوس واحد مرفوع إلى أس.

$\int (x-3)[2(x-3)]^{-3} dx$

$2^{-3} \int (x-3)(x-3)^{-3} dx$

$\frac{1}{2^3} \int (x-3)^{-2} dx \Rightarrow \frac{1}{8} \int (x-3)^{-2} dx$

$= \frac{1}{8} \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + c$

2010 / د (1) خارج القطر

$= \frac{-1}{8(x-3)} + c$

عندما نسحب عامل مشترك من قوس مرفوع إلى أس فإننا نضع أس القوس مع العامل المشترك والقوس.

$(2x-6)^{-1} \Rightarrow 2^{-1} (x-3)^{-1}$

مثال توضيحي $\int (2x-1)(2x-1)^{\frac{1}{2}} dx$

$\int (2x-1)^{\frac{3}{2}} dx$

• لاحظ أن المشتقة لا تتوفر يصبح قوس واحد (عند الضرب تجمع الأسس).

مثال توضيحي $\int (6x+3)(2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$
 عامل مشترك (3)

$\int 3(2x+1)(2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

(عند الضرب تجمع الأسس ويصبح قوس واحد)

$\int 3(2x+1)^{\frac{3}{2}} dx$

ثم تكامل

مثال 26 جد: $\int \sqrt{2x+3} (4x+6) dx$

$\int (2x+3)^{\frac{1}{2}} 2(2x+3) dx$

$\int 2(2x+3)^{\frac{3}{2}} dx$
 نضرب
 مشتقة داخل قوس = 2

$= \frac{2}{5} (2x+3)^{\frac{5}{2}} + c$

2006 / د 1

$= \frac{2}{5} \sqrt{(2x+3)^5} + c$

2010 / تمهيد

2021



ملائمة دار المغرب

168

التكامل

والأحياني
التطبيقي

2 ج



جد: مثال 30 $\int (x^3 + x) \sqrt{x^2 + 1} dx$

$\int x (x^2 + 1) (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

$\int x (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

مشتقة داخل القوس $2x =$

$\frac{1}{2} \int 2x (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{2} + 1} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2} + 1} + c$

$= \frac{1}{5} \sqrt{(x^2 + 1)^5} + c$

جد: مثال 31 $\int \frac{2-x}{\sqrt{4x-8}} dx$

$\int \frac{2-x}{\sqrt{4(x-2)}} dx$

$\int \frac{2-x}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} dx$

$\int \frac{-(x-2)}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} dx$

توضيح

$(x-2)^{\frac{1}{2}} (x-2)^{\frac{1}{2}} = (x-2)$

$-\frac{1}{2} \int (x-2)^{-\frac{1}{2}} dx$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{-\frac{1}{2} + 1} (x-2)^{-\frac{1}{2} + 1} + c$

$= -\frac{1}{3} \sqrt{(x-2)^3} + c$

أفكار تكامل أخرى

المفكرة الأولى: إضافة وطرح عدد للحصول على قوس شبيه.

مثال $\int (x-2)(x+1)^3 dx$

ثم تكامل $[(x+1)-3](x+1)^3 = (x+1)^4 - 3(x+1)^3$

قوس شبيه

* يمكن اعتبار $(x+1)^4$ قوس لأن

$(x-2)$ ليس مشتقة داخل القوس.

مثال $\int x(x-1)^5 dx$

ثم تكامل $[(x-1)+1](x-1)^5 = (x-1)^6 + (x-1)^5$



مثال 28 جد: $\int (x+2) \sqrt[3]{x-1} dx$

$\int [(x-1)+3] (x-1)^{\frac{1}{3}} dx$

$\int (x-1)^{\frac{1}{3}} dx + \int 3 (x-1)^{\frac{1}{3}} dx$

$= \frac{3}{7} (x-1)^{\frac{4}{3}} + 3 \cdot \frac{3}{4} (x-1)^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{7} \sqrt[3]{(x-1)^7} + \frac{9}{4} \sqrt[3]{(x-1)^4} + c$

مثال 29 جد: $\int y \sqrt{y-1} dy$

$\int y (y-1)^{\frac{1}{2}} dy$

$\int [(y-1)+1] (y-1)^{\frac{1}{2}} dy$

$\int (y-1)^{\frac{1}{2}} dy + \int (y-1)^{\frac{1}{2}} dy$

$= \frac{2}{5} (y-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (y-1)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{5} \sqrt{(y-1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(y-1)^3} + c$

الفكرة الأخرى: الاستفادة من خواص الأسس لدمج دالتين داخل قوس واحد.

مثال نفس الأس $x^3 (2 + \frac{1}{x})^3 = [x (2 + \frac{1}{x})]^3 = (2x+1)^3$

مثال نفس الأس $x^4 (5 - \frac{2}{x})^4 = [x (5 - \frac{2}{x})]^4 = (5x-2)^4$

مثال غير متساوي نفس الأس $x^5 (\frac{2}{x} - 3x)^4 = x \cdot x^4 (\frac{2}{x} - 3x)^4 = x [x (\frac{2}{x} - 3x)]^4 = x (2 - 3x^2)^4$

مثال $x^3 (\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x})^4 = x^{-1} \cdot x^4 (\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x})^4 = \frac{1}{x} [x (\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x})]^4 = \frac{1}{x} (\frac{1}{x^2} - 2)^4$

* كل الأقواس اعلاه لا تعتبر (قوس × مشتقة) لعدم إمكانية توفير مشتقة داخل القوس.

$$\int_0^1 x^4 \left(\frac{1}{x} + 3\right)^4 dx$$

مثال 32 جد :

$$\int_0^1 \left[x \left(\frac{1}{x} + 3\right) \right]^4 dx$$

2017 / تمهيد

$$\int_0^1 (1 + 3x)^4 dx$$

مشتقة داخل قوس = 3

$$\frac{1}{3} \int_0^1 3 (1 + 3x)^4 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3x)^5}{5} \right]_0^1 = \left[\frac{(1+3x)^5}{15} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{(1+3 \cdot \frac{1}{3})^5}{15} \right] - \left[\frac{(1+3 \cdot 0)^5}{15} \right]$$

الأعلى الأدنى

$$= \frac{(2)^5}{15} - \frac{(1)^5}{15} = \frac{32}{15} - \frac{1}{15} = \frac{31}{15}$$

$$\int x^8 (2x + \frac{5}{x})^7 dx$$

مثال 31 اوجد :

$$\int x \left(x^2 (2x + \frac{5}{x}) \right)^7 dx$$

$$\int x \left[x (2x + \frac{5}{x}) \right]^7 dx$$

$$\int x (2x^2 + 5)^7 dx$$

مشتقة داخل قوس = 4x

$$\frac{1}{4} \int 4x (2x^2 + 5)^7 dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x^2 + 5)^8}{8} + c$$

$$= \frac{1}{32} (2x^2 + 5)^8 + c$$

فكرة أخرى

مثال 33

$$\int x \sqrt[5]{\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}} dx$$

$$\int x \sqrt[5]{\frac{x-2}{x^5}} dx \Rightarrow \int x \cdot \sqrt[5]{\frac{(x-2)^1}{x^5}} dx$$

$$\int x \cdot \frac{(x-2)^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{5}{5}}} dx \Rightarrow \int \cancel{x} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{1}{5}}}{\cancel{x}} dx$$

$$\int (x-2)^{\frac{1}{5}} dx = \frac{5}{6} (x-2)^{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{6} \sqrt[5]{(x-2)^6} + c$$

السؤال التالي فيه فكرة مختلفة سنتطرق اليها في السطر التالي:

أولاً، عندما يكون فارق أس البسط عن المقام ≥ 1 نساوي الأسس بالتجزئة.

ثانياً، نجعل البسط والمقام بقوس واحد ثم نوفر المشتقة $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)'$.

مثال 34 جد: $\int \frac{2(x-1)^4}{(x+1)^6} dx \rightarrow$ نساوي الأسس حيث نجزء أس المقام

$$\int \frac{2(x-1)^4}{(x+1)^6} dx \Rightarrow \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} dx$$

ننظر إلى القوس $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$ مشتقة داخل القوس هي:

$$\frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

حاصل قسمة التبيين

مشتقة داخل قوس متوفرة

$$\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + c$$

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء الملزمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال. علما ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتأكد واحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي المرقم (٣١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف. لذا اقتضى التنويه والتحذير

تكامل الدوال المثلثية

قبل التطرق إلى الموضوع عليك بمراجعة قوانين الدوال المثلثية التي سبق ذكرها في بداية البلمرة .

الجزء الأول تكاملات مباشرة، وتتم هذه التكاملات عن طريق الجدول أدناه:

$$1 \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$2 \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$3 \quad \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$4 \quad \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$5 \quad \int \sec x \cdot \tan x = \sec x + c$$

$$6 \quad \int \csc x \cot x = -\csc x + c$$

وهذا الجدول لا يتطلب سوى توفير مشتقة الزاوية حيث نقوم بتوفير مشتقة الزاوية ثم تكامل مباشرة من الجدول .

سنة وتمارين الكتاب الخاصة بالجزء الأول

احسب:

مثال

$$1 \quad \int \sin (2x + 4) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int 2 \sin (2x + 4) \, dx$$

مشتقة الزاوية = 2

$$= \frac{-1}{2} \cos (2x + 4) + c$$

$$2 \quad \int x^2 \cdot \sin x^3 \, dx$$

مشتقة الزاوية = $3x^2$

$$= \frac{1}{3} \int 3x^2 \sin x^3 \, dx$$

$$= \frac{-1}{3} \cos x^3 + c$$

3 $\int 9 \sin 3x \, dx$

مشتقة الراوية = 3

$$\left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} \int 3 \sin 3x \, dx = -3 \cos 3x + c$$

4 $\int (x + \sec x \cdot \tan x) \, dx$

نوزج التكامل على الحدين

$$\int x \, dx + \int (\sec x \cdot \tan x) \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \sec x + c$$

5 $\int (\cos x + x^{-2}) \, dx$

نوزج التكامل على الحدين

$$\int \cos x \, dx + \int x^{-2} \, dx$$

طريقة التكامل مباشرة من الجدول

$$= \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \sin x - \frac{1}{x} + c$$

ملاحظة: لو جاء التكامل محدد فهذا لا يغير من طريقة الحل والاختلاف فقط في الخطوة الأخيرة حيث نعوض (الحد العلوي - الدنى).

ملاحظة

6 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$

$$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0$$

$$= 1 - 0 = 1$$

8 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx$

$$= [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\cot \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cot \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 0 + 1 = 1$$

7 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec x \cdot \tan x) \, dx$

$$= [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sec \frac{\pi}{3} - \sec 0$$

$$= \frac{2}{1} - 0 = 2$$

9 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (x + \cos x) \, dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \sin x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^0$$

$$= \left(0 + \sin 0\right) + \left(\frac{(-\frac{\pi}{4})^2}{2} + \sin -\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 0 + \frac{\frac{\pi^2}{16}}{2} - \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - 1$$

الاجتماع الايجابي، لو جاء السؤال بهيلة حاصل ضرب "دالة \times مشتقة"
سوف نسميها اجتماع ايجابي وهي:

دالة	مشتقة قوس
$\cos x$	$\sin x$
$\sec^2 x$	$\tan x$
$-\csc^2 x$	$\cot x$

او بالعكس

ثلاثة تمارين الكتاب الخاصة بالجزء الثاني

1 $\int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$
هنا اجتماع $\sin x$ مع $\cos x$ فهو ايجابي
 $\int (\sin x)^4 \cdot \cos x \, dx$
مشتقة \times قوس
مشتقة داخل القوس $= \cos x$ / يعمل
 $= \frac{\sin^5 x}{5} + c$

2 $\int \tan^6 x \cdot \sec^2 x \, dx$
هنا اجتماع $\tan x$ مع $\sec^2 x$ فهو ايجابي
 $\int (\tan x)^6 \cdot \sec^2 x \, dx$
مشتقة \times قوس
مشتقة داخل القوس $= \sec^2 x$ / يعمل
 $= \frac{\tan^7 x}{7} + c$

3 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$
 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x \, dx$
مشتقة \times قوس
 $= \left[\frac{2}{1} (\sin x)^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left[2\sqrt{\sin x} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$
 $= 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{4}}$
 $= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}$
 $= 2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$

الوصول إلى الاجتهاد الإيجابي من خلال استخدام العلاقات السابقة (القوانين).

الجزء الثالث

مسئلة وتعاريف الكتاب الخاصة بالجزء الثالث

1 $\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x} dx$

* من ملاحظة مضمون السؤال سوف نحدد البسط عبارة عن قانون $\sec^2 x$

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x} dx$$

* أصبح الاجتهاد ايجابي بين $\sec^2 x$ و $\tan x$

$$\int \sec^2 x \cdot (\tan x)^{-3} dx$$

مشتقة \times قوس

مشتقة داخل القوس $\sec^2 x$ فعل

$$= \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c$$

$$= \frac{-1}{2 \tan^2 x} + c$$

2 $\int \frac{\tan x}{\cos^3 x} dx$

$$\int \frac{1 \cdot \tan x}{\cos^3 x} dx \rightarrow \text{قانون } (\sec^2 x)$$

$$\int \sec^2 x \cdot (\tan x)^1 dx$$

قوس \times مشتقة / فعل

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

3 $\int \csc^2 x \cdot \cos x dx$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x dx$$

اجتاهي

$$\int (\sin x)^{-2} \cdot \cos x dx$$

مشتقة (فعل) \times قوس

$$= \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c$$

4 $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1 - \cos^2 2x} dx$

* لاحظ ان البسط قانون $(\sin^2 2x)$

$$\int \frac{1 (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 2x} dx \rightarrow \text{قانون } \cot 2x$$

$$\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot \csc^2 2x dx$$

مشتقة \times قوس

مشتقة داخل القوس $-2 \csc^2 2x$

$$= \frac{-1}{2} \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} (-2 \csc^2 2x) dx$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} (\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{-1}{3} \sqrt{\cot^3 2x} + c$$

5 $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x) dx$

مشتقة \times قوس

$$= \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

أولاً، تكامل $(\cos^2 x / \sin^2 x)$: لا يوجد في الجدول تكامل مباشر لدالة $\sin^2 x$ أو $\cos^2 x$ لذلك عند التكامل لهاتين الدالتين كان علينا البحث عن علاقة نتخلص بها من التربيع لذلك:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

عند تكامل $\sin^2 x$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

عند تكامل $\cos^2 x$

مثلاً $\sin^2 4x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 8x \Rightarrow \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 8x \right) dx$

ضعف الزاوية

مثلاً $\cos^2 6x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 12x \Rightarrow \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 12x \right) dx$

مثال 3 جد: $\int \cos^2 x dx$

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$\int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

مثال 1 جد: $\int \sin^2 3x dx$

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6x \right) dx$$

$$\int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int 6 \cos 6x dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \sin 6x + c$$

مثال 4 جد: $\int \cos^2 2x dx$

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx$$

$$\int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int 4 \cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + c$$

مثال 2 جد: $\int \sin^2 8x dx$

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 16x \right) dx$$

$$\int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \int 16 \cos 16x dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{32} \sin 16x + c$$

ثانياً، تكامل $(\cot^2 x / \tan^2 x)$ لا يوجد في الجدول تكامل مباشر لدالة $\tan^2 x$ أو $\cot^2 x$ لذلك يجب البحث في الجدول عن بديل لتكامل الدالتين.

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

استخدمنا هاتين المتطابقتين لسبب: (لأن المتطابقة فيها $\sec^2 x$ وهي موجودة في الجدول مباشرة) والأخرى $\csc^2 x$ وهي أيضاً موجودة في الجدول لذلك فإن هاتين المتطابقتين ثابتتين في الحل لأنها توصلنا إلى الجدول المباشر.

مثال 7 جد: $\int \cot^2 5x \, dx$

$$\int (\csc^2 5x - 1) \, dx$$

$$\int \csc^2 5x \, dx - \int 1 \, dx$$

$$\frac{1}{5} \int 5 \csc^2 5x \, dx - \int 1 \, dx$$

$$= \frac{-1}{5} \cot 5x - x + c$$

مثال 6 جد: $\int \tan^2 7x \, dx$

$$\int (\sec^2 7x - 1) \, dx$$

$$\frac{1}{7} \int 7 \sec^2 7x - \int 1 \, dx$$

$$= \frac{1}{7} \tan 7x - x + c$$

مثال 8 جد: $\int \tan^2 8x \, dx$

$$\int (\sec^2 8x - 1) \, dx$$

$$\frac{1}{8} \int 8 \sec^2 8x - \int 1 \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \tan 8x - x + c$$

مثلاً، تكامل $(\csc^2 x / \sec^2 x)$ ، تكامل هاتين الدالتين مباشرة من الجدول كما مر عليك سابقاً (الجزء الأول).

مثال ٥ احسب: $\int \csc^2 2x \, dx$

مشتقة الراوية = 2

$$\frac{1}{2} \int 2 \csc^2 2x \, dx = \frac{-1}{2} \cot 2x + c$$

مثال ٦ احسب: $\int \sec^2 4x \, dx$

مشتقة الراوية = 4

$$\frac{1}{4} \int 4 \sec^2 4x \, dx = \frac{1}{4} \tan 4x + c$$

الجزء الخامس التكامل $\cos^3 x$ ، $\sin^3 x$ ، $\cos^4 x$ ، $\sin^4 x$

أولاً، تكامل $\cos^3 x$ ، $\sin^3 x$ ، لتكامل مثل هذه الدوال نسمح الخطوات التالية:

١ نجزء الأسس $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x$

٢ $\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$

٣ نستخدم العلاقات (القوانين) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

٤ بعد استخدام القوانين لاحظ السؤال وفيه احتياطين:

أ لا يوجد فيه مقام فنوزع الأقواس ونجري التكامل (لاحظ المثال الأول).
 ب يوجد مقام فنقوم بتحليل البسط ثم نختصر ونجري التكامل (لاحظ المثال الثاني).

قبل أن نسأل نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار الفريب) من الأنترنت واستنساخها عن طريق برامج

التواصل الاجتماعي أو بصفتها باليوبائيل أو أجهزة نقل الملفات إلى أصحاب المكتبات وسحبها أو شراء المخرمة مستنسخة وببعضها أو عن أي طريق يؤدي إلى ضرر المصلحة سواء كان من التوكيل أو غيره لكون فيها أشكال شرعي وقانوني (وتغير مسير النعمة) كل من يقوم بهذه الأفعال - علماً أن ملازمنا مؤنفة من دار الكتب والوثائق وحاضرة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتخطيط الصناعي وتؤكد وأحذر أن هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لأن ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصلة على شهادة تسجيل وإن عقوبة ذلك موجودة في القانون رقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) وتعديل برقم (٤٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنشوجات المخالفة وأحالت إلى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات أخرى بحق المخالف - لذا اقتضى التنويه والتحذير

جد التكامل $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$

مثال 2

نجزء الأس $\int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{1-\sin x} dx$

نستخدم القانون $\int \frac{(1-\sin^2 x) \cdot \cos x}{1-\sin x} dx$

نحلل $\int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x)}{(1-\sin x)} dx$

مباشرة $\int \cos x dx + \int (\sin x)^1 \cdot \cos x$ مشتقة \times قوس

$= \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + c$

جد التكامل $\int \sin^3 x dx$ مثال 1

$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx$ نجزء الأس

$\int (1-\cos^2 x) \sin x$ نستخدم القانون

$\int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx$ توزيع القوس والتكامل

$\int \sin x dx - \int (\cos x)^2 \sin x$ مباشرة مشتقة \times قوس

$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$

ثانياً: تكامل $\sin^4 x$, $\cos^4 x$ نتبع فيها الخطوات التالية:

1 نجزء الأس $\sin^4 x = \sin^2 x \cdot \sin^2 x$

$\cos^4 x = \cos^2 x \cdot \cos^2 x$

2 نستخدم القوانين $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

3 نوزع الأقواس

4 نقوم بحل مشكلة التوزيع الذي يقول بعد التوزيع

5 نوفر المشتقة ثم نجري التكامل

مثال 2 جدر التكامل $\int \sin^4 x dx$

لجزء الأس $\int \sin^4 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x dx$

نستخدم القانون $= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$

نوزع الأقواس $= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx$

$= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx$

↓ ↓ ↓
مباشر جدول مشكلة

• لا نحري التكامل على الحدين الأول والثاني حتى يتم حل مشكلة $\cos^2 2x$ بالطريقة التي نعلينها سابقاً.

$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx$

فانوت

$= \int \frac{1}{4} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x dx + \int \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx$

$= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \int 4 \cos 4x dx$

$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$

←

$= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$

• الحل مطول ويمكن الاختصار بالخطوات.

مثال 4 احسب $\int \cos^4 3x dx$

$$\begin{aligned} \int \cos^4 3x dx &= \int \cos^2 3x \cdot \cos^2 3x dx \\ &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6x \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos^2 6x \right) dx \end{aligned}$$

جمع

$$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos^2 6x \right) dx$$

مباشرة جدول مشكلة

$$= \int \frac{1}{4} dx + \int \frac{1}{2} \cos 6x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 12x \right) dx$$

قانون
(حل المشكلة)

$$= \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int 6 \cos 6x dx + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} \int 12 \cos 12x dx$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{96} \sin 12x + c$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x + c$$

الجزء السادس إذا جاء التكامل بزوايا مختلفة.

بجانب ان نؤخذ زوايا السؤال باستخدام العلاقات التالية:

في حالة وجود بسط ومقام $\Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

في حالة وجود $(\cos x)$ في الخارج $\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

في حالة وجود $(\sin x)$ في الخارج $\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

في حالة وجود $\Rightarrow \sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\sin 2x \cos x$
 $\sin 2x \sin x$

تذكر

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

مثال 2 جد التكامل $\int \sin 6x \cos^2 3x dx$

فانوت $\int (2 \sin 3x \cos 3x) \cos^2 3x dx$

$\int 2 \sin 3x \cos^3 3x dx$

$2 \int (\cos 3x)^3 \sin 3x dx$

مشتقة \times قوس

مشتقة داخل القوس $= -3 \sin 3x$

نعمل $2 \cdot \frac{1}{-3} \int (\cos 3x)^3 \cdot (-3 \sin 3x) dx$

$= \frac{-2}{3} \cdot \frac{\cos^4 3x}{4} + c$

$= \frac{-1}{6} \cos^4 3x + c$

مثال 3 احسب $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$\int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$\int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{(\cos 2x - \sin 2x)} dx$

$\int (\cos 2x + \sin 2x) dx$

$\frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx + \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x dx$

$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$

3 $\int (1 + \cos 3x)^2 dx$

(فتح الترييح لعدم توفر مشتقة داخل القوس)

$\int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x) dx$

مشكلة مباشر مباشر

$\int (1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x) dx$

$\int (\frac{3}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 6x) dx$

نوزع التكامل على الحدود

$\int \frac{3}{2} dx + 2 \cdot \frac{1}{3} \int 3\cos 3x dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int 6\cos 6x$

$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

4 $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

قابل للتحليل

$\int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) dx$

قانون $\cos 2x$

قانون $1 =$

$\int \cos 2x dx$

مشتقة الزاوية = 2

$\frac{1}{2} \int 2\cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$

1 $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$

$\int \sqrt{\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x} dx$

$\int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}$

$\int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx$

$\pm \int (\sin x - \cos x) dx$

$= \pm (-\cos x - \sin x) + c$

$= \pm (\cos x + \sin x) + c$

2 $\int \frac{\cos \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx$

$\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} =$ مشتقة الزاوية

$-2 \int \frac{-\cos \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}} dx$ نعمل مشتقة الزاوية

$= -2 \sin \sqrt{1-x} + c$

6 $\int \cot x \cdot \csc^3 x dx$

مشقة الـ $\csc x$ هي $-\csc x \cot x$
 نحتاج $\csc x$ بجانب $\cot x$ نأخذها من
 $\csc^3 x$ ونبقى $\csc^2 x$ ونوفر السالب.

$$-\int \boxed{-\cot x \cdot \csc x} (\csc x)^2 dx$$

نعمل

$$= \frac{-\csc^3 x}{3} + c$$

5 $\int \frac{2 \sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

مشقة الرابطة = $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نعمل $2(3) \int \frac{1 \sin \sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow$

$$= -6 \cos \sqrt[3]{x} + c$$

7 $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2) dx$

نوزع الأقواس

$$\int (\sin 2x \cos^2 2x + 2 \sin 2x - \cos^2 2x - 2) dx$$

مباشر مشكلة مباشر إيجابي

$$\int \left[\sin 2x \cos^2 2x + 2 \sin 2x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) - 2 \right] dx$$

$$\int \left(\sin 2x \cos^2 2x + 2 \sin 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x - 2 \right) dx$$

$$\frac{1}{-2} \int \underbrace{-2 \sin 2x (\cos 2x)^2}_{\text{نعمل}} dx + \int 2 \sin 2x dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int 4 \cos 4x - \int \frac{5}{2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^3 2x}{3} - \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{5}{2} x + c$$

$$= -\frac{1}{6} \cos^3 2x - \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{5}{2} x + c$$

أسئلة من نصائح

عندما يعطى سؤال تكامل فيه أحد حدود التكامل \int_a^b مجهولة نتبع الخطوات التالية:

أولاً: نجري عملية تكامل اعتيادية. (كما سبق أن تعلمناها)

ثانياً: نعوض الحدود (الأعلى - الأدنى).

ثالثاً: بعد التعويض سوف نحصل على معادلة نحلها ونجد الحد المجهول.

جد قيمة $a \in \mathbb{R}$ إذا كان:

مثال 2

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = 2$$

1 د / 2004

$$\int_1^4 x (x^2+9)^{-\frac{1}{2}} dx = 2$$

مشتقة داخل القوس $2x$

$$\frac{1}{2} \int_1^4 2x (x^2+9)^{-\frac{1}{2}} dx = 2$$

$$\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} (x^2+9)^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = 2$$

$$\left[\sqrt{x^2+9} \right]_1^4 = 2$$

$$\sqrt{(4)^2+9} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

الأعلى الأدنى

$$\sqrt{25} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

$$5-2 = \sqrt{a^2+9}$$

بالتربيع

$$9 = a^2 + 9 \Rightarrow a^2 = 0$$

$$a = 0$$

جد قيمة $a \in \mathbb{R}$ إذا علمت أن:

مثال 1

$$\int_1^a \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right]_1^a = 2 \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left[\left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}a \right) - \left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] = 2 \left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 \right)$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - 1 = 2(1-0)$$

2014 / تمهيدي

2015 / د (1)

$$\left[\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} - 3 = 0 \right] \cdot 2$$

$$a^2 + a - 6 = 0$$

تجربة

$$(a+3)(a-2) = 0$$

$$\text{بمثل } a+3=0 \Rightarrow a=-3 \text{ أما}$$

لأن قيمة a يجب أن تكون أكبر من (1)

تكون الحد الأعلى a أكبر من الأدنى (1)

$$\text{أو } a-2=0 \Rightarrow a=2$$

$$\int_a^b (2x+3) dx = 12 \quad \text{إذا كان}$$

مثال 4

وكانت $a, b \in \mathbb{R}$ جد قيمتي $a+2b=3$

$$\int_a^b (2x+3) dx = 12$$

2 * / 1998

$$\left[\frac{2x^2}{2} + 3x \right]_a^b = 12$$

$$\left[x^2 + 3x \right]_a^b = 12$$

$$(b^2 + 3b) - (a^2 + 3a) = 12$$

$$b^2 + 3b - a^2 - 3a = 12 \quad \dots (1)$$

$$a + 2b = 3 \Rightarrow a = 3 - 2b \quad \dots (2)$$

$$b^2 + 3b - (3 - 2b)^2 - 3(3 - 2b) = 12$$

$$b^2 + 3b - (9 - 12b + 4b^2) - 9 + 6b - 12 = 0$$

$$b^2 + 3b - 9 + 12b - 4b^2 - 9 + 6b - 12 = 0$$

$$-3b^2 + 21b - 30 = 0 \Rightarrow 3b^2 - 21b + 30 = 0$$

$$b^2 - 7b + 10 = 0$$

$$(b-5)(b-2) = 0$$

$$\text{أما } b-5=0 \Rightarrow b=5$$

$$a = 3 - 2b = 3 - 2(5) = 3 - 10$$

$$a = -7$$

$$\text{أو } b-2=0 \Rightarrow b=2$$

$$a = 3 - 2b = 3 - 2(2) = 3 - 4$$

$$a = -1$$

$$\int_{-1}^a (x - x^2) dx = \frac{-9}{4} \quad \text{إذا كان}$$

مثال 3

جد قيمة $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-1}^a (x - x^2) dx = \frac{-9}{4}$$

1 * / 1998

$$\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^a = \frac{-9}{4}$$

$$\left[\frac{(a)^2}{2} - \frac{(a)^3}{3} \right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{-9}{4}$$

بحرية المعادلة $\times (4)$

$$\frac{a^2}{2} (4) - \frac{a^3}{3} (4) - \frac{1}{2} (4) + \frac{1}{3} (4) = \frac{-9}{1}$$

$$2a^2 - a^3 - 1 = -9 \Rightarrow a^3 - 2a^2 + 1 - 9 = 0$$

$$a^3 - 2a^2 - 8 = 0$$

$$(a^2 + 2)(a^2 - 4) = 0$$

$$\text{أما } a^2 + 2 = 0 \text{ يعمل } \notin \mathbb{R}$$

$$\text{أو } a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \text{ الجذر}$$

$$a = \pm 2$$

$$a = 2$$

$$a = -2 \rightarrow$$

يعمل لأنها أصغر من الحد الأدنى

إذا كانت للمنحنى $f(x) = (x-3)^3 + 1$

نقطة انقلاب (a, b) جد القيمة العددية

$$\int_0^b \bar{f}(x) dx - \int_0^a \bar{\bar{f}}(x) dx$$

$$f(x) = (x-3)^3 + 1$$

$$\bar{f}(x) = 3(x-3)^2 \quad (1) \Rightarrow \bar{f}(x) = 3(x-3)$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 6(x-3)(1) \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 6(x-3)$$

$$[6(x-3) = 0] \div 6 \Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$(3,1) \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{نقطة انقلاب}$$

$$\int_0^b \bar{f}(x) dx - \int_0^a \bar{\bar{f}}(x) dx$$

$$\int_0^1 3(x-3)^2 dx - \int_0^3 6(x-3) dx$$

$$= \left[\frac{3(x-3)^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{6(x-3)^2}{2} \right]_0^3$$

$$= [(x-3)^3]_0^1 - [3(x-3)^2]_0^3$$

$$= [(1-3)^3 - (0-3)^3] - [3(3-3)^2 - 3(0-3)^2]$$

$$= [(-2)^3 - (-3)^3] - [0 - 3(-3)^2]$$

$$= -8 + 27 + 27 = 46$$

لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث

$k \in \mathbb{R}$ ، دالة نهايتها الصغرى (-5)

$$\int_1^3 f(x) dx$$

$$f(x) = x^2 + 2x + k \quad \text{تعويض}$$

$$\bar{f}(x) = 2x + 2$$

$$2x + 2 = 0 \Rightarrow [2x = -2] \div 2$$

$$x = -1, \quad y = -5, \quad (-1, -5)$$

$$f(x) = x^2 + 2x + k$$

$$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k$$

$$-5 = 1 - 2 + k \Rightarrow k = -4$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (x^2 + 2x - 4) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{(3)^3}{3} + (3)^2 - 4(3) \right] - \left[\frac{(1)^3}{3} + (1)^2 - 4(1) \right]$$

$$= (9 + 9 - 12) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 4 \right)$$

$$= (6) - \left(\frac{1}{3} - 3 \right)$$

$$= 6 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{9}{1} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{26}{3}$$

تكامل الدالة التي تحتوي على مطلق

نضع الخطوات التالية عند تكامل دالة تحتوي على مطلق.

أولاً : نأخذ ما بين المطلق ونساويه الى الصفر ونجد قيمة x .

ثانياً : بعد إيجاد قيمة x ونسبى الحد الفاصل نجعل الدالة مزدوجة (منشطرة).

$$f(x) = \begin{cases} + (\text{الدالة}) & x \geq c \\ - (\text{الدالة}) & x < c \end{cases}$$

نضع قيمة x هنا
ولتكن $x = c$



ثالثاً : تكامل بالشكل التالي :

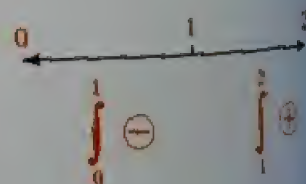
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c -(\text{الدالة}) dx + \int_c^b +(\text{الدالة}) dx$$

الحد الأعلى b ←
قيمة x (الحد الفاصل) c ←
الحد الأدنى a ←

مثال 1 : لتكن $f(x) = |x-1|$ أوجد $\int_0^2 f(x) dx$

نأخذ ما بين المطلق ونساويه الى الصفر $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$f(x) = \begin{cases} + (x-1) & x \geq 1 \\ - (x-1) & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$



$$\int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^2 (x-1) dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2$$

$$= \left[\left(-\frac{(1)^2}{2} + 1 \right) - (0) \right] + \left[\left(\frac{(2)^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{(1)^2}{2} - (1) \right) \right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(\frac{4}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

مثال 2

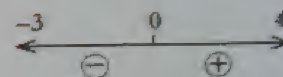
لتكن $f(x) = |x|$ أوجد

$$\int_{-3}^4 f(x) dx$$

نأخذ ما بداخل المطلق

$$x = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} +x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 |x| dx &= \int_{-3}^0 -x dx + \int_0^4 x dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \left[\left(-\frac{(0)^2}{2} \right) - \left(-\frac{(-3)^2}{2} \right) \right] + \left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] \\ &= -\left(-\frac{9}{2} \right) + \frac{16}{2} \\ &= \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2} = 12 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

لتكن $f(x) = |x+1|$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

هنا قيمة x تساوي الحد الأدنى لذلك تكامل جزء واحد من الدالة.

$$f(x) = \begin{cases} +(x+1) \\ -(x+1) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

* المطلوب تكامل من (-1) الى (1) أي أكبر ويساوي (-1) تكامل الشطر الأول لأن الشطر الأول $-1 \geq$ وفقاً للمطلوب.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (x+1) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{(1)^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1 = 2 \end{aligned}$$

تحذير هام جداً

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايضاً الهابالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء المزمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال، علماً ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتؤكد وأحذر ان هناك عقوبات بحق هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي المرقم (٣١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف. لذا اقتضى التنويه والتحذير

الاحيائي والتطبيقي

التكامل



أثبت أن: $\int_{-2}^4 |3x-6| dx = 30$

مثال 4

$3x-6=0 \Rightarrow [3x=6] \div 3 \Rightarrow x=2$



$f(x) = \begin{cases} + (3x-6) \\ - (3x-6) \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-6 & x \geq 2 \\ -3x+6 & x < 2 \end{cases}$

$\int_{-2}^4 |3x-6| dx = \int_{-2}^2 (-3x+6) dx + \int_2^4 (3x-6) dx$

$= \left[-\frac{3x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x \right]_2^4$

$= \left[\left(-\frac{3(2)^2}{2} + 6(2) \right) - \left(-\frac{3(-2)^2}{2} + 6(-2) \right) \right] + \left[\left(\frac{3(4)^2}{2} - 6(4) \right) - \left(\frac{3(2)^2}{2} - 6(2) \right) \right]$

$= \left[\left(-\frac{12}{2} + 12 \right) - \left(-\frac{12}{2} - 12 \right) \right] + \left[\left(\frac{48}{2} - 24 \right) - \left(\frac{12}{2} - 12 \right) \right]$

$= (6) - (-18) + (0) - (-6)$

$= 6 + 18 + 6 = 30$

RHS = LHS

Notes

الرياضيات

الملاحظات

تكامل الدالة ذات الشطرين

- أولاً ، نبحث استمرارية الدالة عند الحد الفاصل .
ثانياً ، تكامل شطري الدالة حسب حدود التكامل .

شرح الخطوات مع مثال (3)

إذا كانت

مثال 2

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 3 \\ 6 & x < 3 \end{cases}$$

$$\int_1^4 f(x) dx$$

أوجد

$$f(3) = 2(3) = 6$$

الصورة

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x = 2(3) = 6 = L_1$$

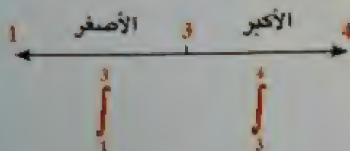
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 6 = 6 = L_2$$

الغاية موجودة

$$L_1 = L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

الدالة مستمرة



$$\int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 6 dx + \int_3^4 2x dx$$

$$= [6x]_1^3 + [x^2]_3^4$$

$$= [6(3) - 6(1)] + [(4)^2 - (3)^2]$$

$$= (18 - 6) + (16 - 9)$$

$$= 12 + 7 = 19$$

إذا كانت

مثال 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ 3 & x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^5 f(x) dx$$

أوجد

$$f(1) = 2(1) + 1 = 3$$

الصورة

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 3 = 3 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x+1 = 2(1) + 1 = 3 = L_2$$

الغاية موجودة

$$L_1 = L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

الدالة مستمرة



$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^1 3 dx + \int_1^5 (2x+1) dx$$

$$= [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5$$

$$= [3(1) - 3(0)] + [(5)^2 + 5 - ((1)^2 + 1)]$$

$$= (3 - 0) + (25 + 5 - (1 + 1))$$

$$= 3 + 30 - 2 = 31$$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \forall x \geq 0 \\ 2x & \forall x < 0 \end{cases}$$

إحداثيات

$$f(0) = 3(0)^2 = 0 \quad \text{الصورة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 3(0)^2 = 0 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 2(0) = 0 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

(الصورة = النهاية)

موضع الحد الفاصل (0) بمائة \leq أو \geq .

أو التي تحتوي على علاقة المساواة لتحديد الصورة.

الحد نهاية \lim عند $x \rightarrow$ من الحد الفاصل.

الحد الفاصل (الصورة = النهاية).

الصورة التامة



$$\int_{-1}^0 + \int_0^3$$

تكامل الحد الذي فيه علامة أكبر أو يساوي
تكامل الحد الذي فيه علامة أصغر

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^3 3x^2 dx$$

الخط الذي فيه $<$ الخط الذي فيه \geq أو يساوي

$$\begin{aligned} &= [x^2]_{-1}^0 + [x^3]_0^3 \\ &= [(0)^2 - (-1)^2] + [(3)^3 - (0)^3] \\ &= (0 - 1) + (27 - 0) \\ &= -1 + 27 = 26 \end{aligned}$$

أولاً : اشتقاق الدالة التي تحتوي على (Ln).

$$y = \text{Ln} (f(x)) \Rightarrow \bar{y} = \frac{\bar{f}(x)}{f(x)} = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{نفس الدالة}}$$

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

مثال

5 $y = (\text{Ln } x)^2$

* قوس مرفوع الى أس / نتبع قاعدة اشتقاق قوس مرفوع الى أس.

$$\frac{dy}{dx} = 2 (\text{Ln } x)^1 \cdot \left(\frac{1}{x} \right)$$

مشتقة داخل القوس

$$= \frac{2 \text{Ln } x}{x}$$

1 $y = \text{Ln} (3x^2 + 4)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

2 $y = \text{Ln} (3x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

6 $y = \text{Ln} (2 - \cos x)$

مشتقة الزاوية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 - (-\sin x)(1)}{2 - \cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

3 $y = \text{Ln} \frac{x}{2} \Rightarrow y = \text{Ln} \frac{1}{2} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x} \times \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

4 $y = \text{Ln} (x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$$



9 $y = \ln \tan^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 (\tan x)^1 \cdot \sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sec^2 x}{\tan x}$$

توضيح

$\tan^2 x$ يعتبر قوس مرفوع الى أس

$$\begin{matrix} 2 & (\tan x)^1 & \cdot & \sec^2 x \\ \text{أس} & \text{القوس} & & \text{مشتقة داخل قوس} \end{matrix}$$

7 $y = \ln \left(\frac{1}{x} \right)^3$

$$y = \ln \frac{1}{x^3} \Rightarrow y = \ln x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x}$$

8 $y = x^2 \cdot \ln x$

حاصل ضرب دالتين

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 2x \\ &= x + 2x \ln x \end{aligned}$$

ثانياً، اشتقاق الدالة التي تحتوي على e .

$$y = e^{f(x)} \Rightarrow \bar{y} = \bar{f}(x) \cdot e^{f(x)}$$

\downarrow مشتقة الأس \downarrow نفس الدالة

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

مثال

3 $y = x^2 \cdot e^x$

حاصل ضرب دالتين

$$\bar{y} = x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x$$

$$\bar{y} = x^2 e^x + 2x e^x$$

1 $y = e^{\tan x}$

$$\bar{y} = \sec^2 x \cdot e^{\tan x}$$

2 $y = e^{-5x^2+3x+5}$

$$\bar{y} = (-10x+3) e^{-5x^2+3x+5}$$

8 $y = 7^{\frac{x}{4}}$

$$\frac{dy}{dx} = 7^{\frac{x}{4}} \cdot \ln(7) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\ln(7) \cdot 7^{\frac{x}{4}}}{4}$$

7 $y = 9^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}} \cdot \ln(9) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مشتقة داخل الجذر = مشتقة الجذر
نفس الجذر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9^{\sqrt{x}} \cdot \ln 9}{2\sqrt{x}}$$

والجاء تكامل الدالة التي تحتوي على (e).
نوفر مشتقة الأس بعدها تهمل المشتقة
وتبقى $e^{f(x)}$ فقط وينتهي الحل.

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^{f(x)} + c$$

جد التاكاملات التالية:

3 $\int \sec^2 3x \cdot e^{\tan 3x} dx$

3 $\sec^2 3x \leftarrow \tan 3x$ مشتقة الـ

$$\frac{1}{3} \int \frac{3 \sec^2 3x \cdot e^{\tan 3x}}{\text{تهمل}} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{\tan 3x} + c$$

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \sin x dx$

بهر مشتقة الأس وهي $(-\sin x)$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \cdot \frac{(-\sin x) dx}{\text{تهمل}}$$

$$= [-e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (-e^{\cos \frac{\pi}{2}}) - (-e^{\cos 0})$$

$$= -e^0 + e^1 = -1 + e$$

4 $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ مشتقة الـ \sqrt{x} هي

$$\int_1^4 \frac{1 \cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \rightarrow \text{مشتقة الـ } \sqrt{x} \text{ تهمل}$$

$$= [e^{\sqrt{x}}]_1^4$$

$$= e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}$$

$$= e^2 - e^1$$

2 $\int x e^{x^2} dx$

مشتقة الأس = $2x$

$$\frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

7 $\int_0^1 (1+e^x)^2 \cdot e^x dx$

$$= \left[\frac{(1+e^x)^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{(1+e^1)^3}{3} - \frac{(1+e^0)^3}{3}$$

$$= \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{(1+1)^3}{3}$$

$$= \frac{(1+e)^3 - 8}{3}$$

5 $\int_0^{\ln 2} e^{-x} dx$

$$= - \int_0^{\ln 2} \ominus e^{-x} dx$$

$$= [-e^{-x}]_0^{\ln 2}$$

$$= (-e^{-\ln 2}) - (-e^0)$$

$$= -e^{\ln 2^{-1}} + e^0$$

$$= -2^{-1} + 1$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

8 $\int_1^2 x e^{-\ln x} dx$

$$= \int_1^2 x e^{-\ln x^{-1}} dx$$

$$= \int_1^2 x e^{\ln \frac{1}{x}} dx$$

$$= \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int_1^2 1 dx$$

$$= [x]_1^2$$

$$= 2 - 1 = 1$$

6 $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$

$$= \frac{1}{2} \int_{\ln 3}^{\ln 5} 2e^{2x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\ln 3}^{\ln 5}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2\ln 5} - \frac{1}{2} e^{2\ln 3}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\ln 5^2} - \frac{1}{2} e^{\ln 3^2}$$

$$= \frac{1}{2} (25) - \frac{1}{2} (9) = \frac{25}{2} - \frac{9}{2}$$

$$= \frac{16}{2} = 8$$



خامساً، تكامل الدالة بالشكل $\left(\frac{\text{مشتقة البقام}}{\text{البقام}} \right)$

عندما يكون البسط عبارة عن مشتقة بما موجود في البقام فإن البسط يهمل وناخذ البقام $|\text{Ln}|$ فقط.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \text{Ln} |f(x)| + c$$

جد التكمالات التالية:

مثلة

3 $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$

$$\begin{aligned} &= \left[\text{Ln} |x^3 + 4x + 1| \right]_0^1 \\ &= \text{Ln} ((1)^3 + 4(1) + 1) - \text{Ln} ((0)^3 + 4(0) + 1) \\ &= \text{Ln} 6 - \text{Ln} 1 = \text{Ln} 6 \end{aligned}$$

1 $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$

$$\begin{aligned} &= \left[\text{Ln} |x+1| \right]_0^3 \\ &= \text{Ln} (3+1) - \text{Ln} (0+1) \\ &= \text{Ln} (4) - \text{Ln} (1) \\ &= \text{Ln} 4 \end{aligned}$$

4 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x} dx$

$$\begin{aligned} &= \left[\text{Ln} |2 + \tan x| \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \text{Ln} \left(2 + \tan \frac{\pi}{4} \right) - \text{Ln} \left(2 + \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= \text{Ln} (2+1) - \text{Ln} (2-1) \quad \leftarrow \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\ &= \text{Ln} 3 - \text{Ln} 1 = \text{Ln} 3 \end{aligned}$$

2 $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx$

$$\begin{aligned} &= \left[\text{Ln} |x^2 + 9| \right]_0^4 \\ &= \text{Ln} (4^2 + 9) - \text{Ln} (0^2 + 9) \\ &= \text{Ln} 25 - \text{Ln} 9 = \text{Ln} \frac{25}{9} = \text{Ln} \frac{5}{3} \\ &= \text{Ln} \left(\frac{5}{3} \right)^2 = 2 \text{Ln} \frac{5}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 6 \quad & \int \tan x \, dx \\
 & \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\
 & - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \\
 & = -\ln|\cos x| + c \Rightarrow \ln|\cos^{-1} x| + c \\
 & = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c = \ln|\sec x| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \int \cot x \, dx \\
 & \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \\
 & \text{مشتقة الـ } \cos x = \sin x \\
 & = \ln|\sin x| + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \int \cot^3 5x \, dx \\
 & \int \cot^2 5x \cdot \cot 5x \, dx \\
 & \int (\csc^2 5x - 1) \cdot \cot 5x \, dx \\
 & \int (\cot 5x \cdot \csc^2 5x - \cot 5x) \, dx \\
 & \int \cot 5x \cdot \csc^2 5x \, dx - \int \frac{\cos 5x}{\sin 5x} \, dx \\
 & \text{طريقة الـ } \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c \\
 & = \frac{1}{5} \int \cot 5x (-5 \csc^2 5x) - \frac{1}{5} \int \frac{\sin 5x}{\sin 5x} \, dx \\
 & = \frac{-1}{5} \frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5} \ln|\sin 5x| + c \\
 & = \frac{-1}{10} \cot^2 5x - \frac{1}{5} \ln|\sin 5x| + c
 \end{aligned}$$

Notes

الرياضيات

الملاحظات

إيجاد مساحة المنطقة المستوية

- أولاً : إذا طلبت مساحة منطقة محددة بدالة $f(x)$ ومحور السينات وبدون فترة .
- 1 تساوي الدالة $f(x)$ للصفر ونجد $(x) \leftarrow$ نجد نقاط التقاطع مع محور السينات .
- 2 احتمالات قيم x .

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{حدود التكامل}$$

(a) إذا كانت لدينا قيمتان فقط (a)
 a, b هي قيم x

$$A_1 = \int_a^b f(x) dx$$

$$A_2 = \int_b^c f(x) dx$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

(a) إذا كانت لدينا ثلاث قيم

(b) إذا كانت لدينا ثلاث قيم x a A_1 b A_2 c
 أصغر قيمة لـ x أكبر قيمة لـ x

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2 \right]_0^1 - [0]$$

الحد الأدنى الحد الأعلى

$$= \frac{(1)^4}{4} - 1 + 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{(2)^4}{4} - (2)^3 + (2)^2 \right] - \left[\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2 \right]$$

$$(4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right)$$

مثال 1 جد المساحة المحددة بالمنحني

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \quad \text{ومحور السينات}$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad (\text{نصفر الدالة})$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad (\text{عامل مشترك})$$

تجربة

$$x(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

(أصغر رقم) (أعلى رقم)
 0 A_1 1 A_2 2

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

$$= [0] - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{4(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2} \right]$$

$$= - \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right] \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$= - \left(\frac{3-16+18}{12} \right) \Rightarrow A_2 = \frac{-5}{12}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{8}{3} \right| + \left| \frac{-5}{12} \right| \Rightarrow A = \frac{8}{3} + \frac{5}{12}$$

$$A = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12} \text{ unit}^2$$

جد المساحة المحددة بالدالة

$$f(x) = x^4 - x^2 \quad \text{ومحور السينات}$$

$$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{بالحذر} \quad x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{بالحذر} \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$A_1 = \int_{-1}^0 (x^4 - x^2) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0$$

$$A_1 = [0] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} \right]$$

$$= 0 - \frac{1}{4} \Rightarrow A_2 = \frac{-1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{-1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \text{ (unit)}^2$$

مثال 2

جد المساحة المحددة بالمنحنى

$$y = x^3 + 4x^2 + 3x \quad \text{ومحور السينات}$$

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$x(x+3)(x+1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$



$$A_1 = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-3}^{-1}$$

$$A_1 = \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{4(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2} \right] - \left[\frac{(-3)^4}{4} + \frac{4(-3)^3}{3} + \frac{3(-3)^2}{2} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2} \right)$$

توحيد مقام

$$= \left(\frac{3-16+18}{12} \right) - \left(\frac{81-144+54}{4} \right)$$

$$= \left(\frac{5}{12} \right) - \left(\frac{-9}{4} \right) = \frac{5}{12} + \frac{9}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{5}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^0 (x^3 + 4x^2 + 3x) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^0$$

توحيد مقامات وحجم مادي

$$A_1 = -\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{15}$$

$$A_1 = \frac{-2}{15}$$

$$A_2 = \int_0^1 (x^4 - x^2) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$A_2 = \left(\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3} \right) - (0)$$

$$A_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \Rightarrow A_2 = \frac{-2}{15}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{-2}{15} \right| + \left| \frac{-2}{15} \right| \Rightarrow A = \frac{4}{15} \text{ unit}^2$$

Notes

الرياضيات

الملاحظات

ثانياً ، إذا طلبت مساحة منطقة محددة بدالة $f(x)$ ومحور السينات والفترة $[a, b]$ أو المستقيمين $x = a$, $x = b$.

خطوات الحل

1) نساوي الدالة للصفر ونجد قيم (x) .

2) إذا كانت قيم x لا تنتمي للفترة $[a, b]$ تهمل ونجد المساحة مباشرة من حدود الفترة a, b من السؤال .

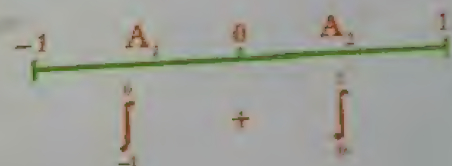
تمثل حدود فترة السؤال $\left\{ \begin{array}{l} \text{تمثل حدود فترة السؤال} \\ A = \int_a^b f(x) dx \end{array} \right.$

لا حظ مثال (1)

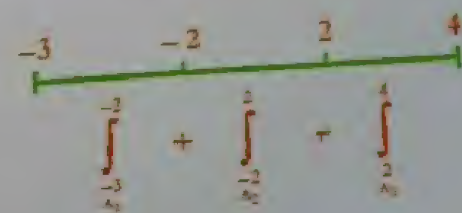
3) إذا كانت قيم x هي نفسها حدود الفترة أي أن $x = a$, $x = b$ نجد المساحة مباشرة كما في فرع 2 .

2) إذا كانت قيم $x \in [a, b]$ نجزء الفترة .

مثال توضيحي $f(x) = x^2$ $x \in [-1, 1]$
 $x^2 = 0 \Rightarrow 0 \in [-1, 1]$



مثال توضيحي $f(x) = x^2 - 4$ $[-3, 4]$
 بالجذر $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$
 $x = \pm 2 \in [-3, 4]$



$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots$



جد مساحة المنطقة المحددة

مثال 5

بينحنى بالدالة $y = x^4 - x$ ومحور السينات والـ $x = 1$ ، $x = -1$ المستقيمين

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{أو } x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$



$$A_1 = \int_{-1}^0 (x^4 - x) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0$$

$$A_1 = [0] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^2}{2} \right]$$

$$A_1 = -\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \quad \text{توجيه مقامات}$$

$$A_1 = \frac{2+5}{10} \Rightarrow A_1 = \frac{7}{10}$$

$$A_2 = \int_0^1 (x^4 - x) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$A_2 = \left[\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^2}{2} \right] - [0]$$

$$A_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{2-5}{10} \Rightarrow A_2 = -\frac{3}{10}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{7}{10} \right| + \left| -\frac{3}{10} \right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$A = 1 \text{ (unit}^2\text{)}$$

جد مساحة المنطقة المحددة

مثال 6

بينحنى بالدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{أو } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$



$$A_1 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0$$

$$A_1 = [0] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 \right]$$

$$A_1 = -\left(\frac{16}{4} - 8 \right) = -(4 - 8) \Rightarrow A_1 = 4$$

$$A_2 = \int_0^2 (x^3 - 4x) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2$$

$$A_2 = \left[\frac{(2)^4}{4} - 2(2)^2 \right] - [0]$$

$$A_2 = \frac{16}{4} - 8 \Rightarrow A_2 = -4$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = |4| + |-4|$$

$$A = 4 + 4 \Rightarrow A = 8 \text{ unit}^2$$

تمهيد / 2000





$$A_3 = \int_1^3 (x^2 - 1) dx$$

$$A_3 = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3$$

$$A_3 = \left(\frac{(3)^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{(1)^3}{3} - 1 \right)$$

$$A_3 = (9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right)$$

$$A_3 = 6 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{1} - \frac{1}{3}$$

$$A_3 = \frac{21 - 1}{3} \Rightarrow A_3 = \frac{20}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$A = \left| \frac{4}{3} \right| + \left| \frac{-4}{3} \right| + \left| \frac{20}{3} \right|$$

$$A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$$

$$A = 9 \frac{1}{3} \text{ unit}^2$$

جد مساحة المنطقة التي

مثال 7

يحددها مخطط الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 3$ ، $x = 1$

$$A = \int_1^3 x^2 dx$$

$$x^2 = 0$$

$$\frac{x}{x} = 0 \notin [1, 3]$$

نصل

$$A = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3$$

$$A = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}$$

$$A = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{26}{3} \text{ unit}^2$$

$$A = 8 \frac{2}{3} \text{ unit}^2$$

جد مساحة المنطقة المحددة

مثال 6

بالمنحنى $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1}$$

$$A_1 = \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1) \right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - (-2) \right]$$

$$A_1 = \left(\frac{-1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 2 \right)$$

$$A_1 = \frac{-1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 = \frac{7}{3} - 1$$

$$A_1 = \frac{7 - 3}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{4}{3} \text{ وحدة مساحة}$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1$$

$$A_2 = \left[\frac{(1)^3}{3} - 1 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1) \right]$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{-1}{3} + 1 \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{1}$$

$$A_2 = \frac{2 - 6}{3} \Rightarrow A_2 = \frac{-4}{3}$$



الدوال الدائرية

$\tan x = -1$ 2

* الزاوية التي لها $\tan = 1$ هي $\frac{\pi}{4}$
اذن زاوية الإسناد $= \frac{\pi}{4}$

نحدد الربع الذي فيه \tan سالبة وهو الربع الثاني والرابع

الزاوية الإسناد $= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ الثاني / $x = \pi - \frac{\pi}{4}$

الزاوية الإسناد $= 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ الرابع / $x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

ثانياً: تذكرات:

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

أمثلة

$\sin \frac{-\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \frac{-\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

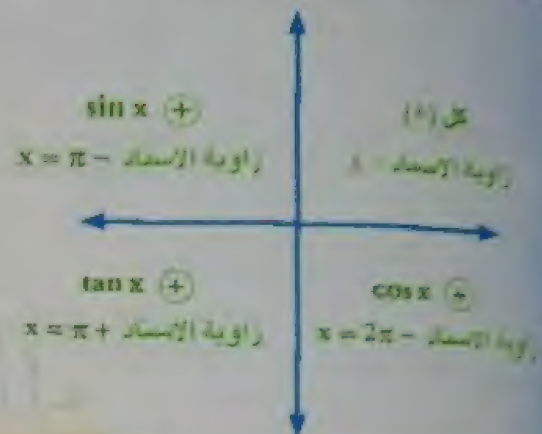
السالبة مع \cos يسهل

$\tan \frac{-\pi}{4} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

\tan مع زاوية سالبة نفس خاصية \sin

مراجعة

أولاً: إشارات الدوال حسب الأرباع:



مثلة توضيحية

عند إيجاد قيمة الزاوية x

مثلاً $\cos x = \frac{1}{2}$

نعرف ان الزاوية التي لها $\cos = \frac{1}{2}$ هي الزاوية $\frac{\pi}{3}$

اذن ← زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$

نحدد الربع و $\cos x$ موجب في الربع الاول والرابع

a $\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ زاوية الإسناد $\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ الأول

b $\Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ زاوية الإسناد $\Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ الرابع

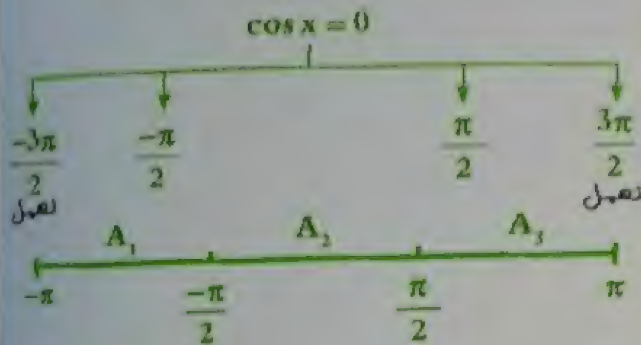
$x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{5\pi}{3}$

جد المساحة المحددة بمنحنى

مثال 9

بالدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi, \pi]$



$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos x \, dx$$

$$A_1 = [\sin x]_{-\pi}^{-\pi/2}$$

$$A_1 = \left(\sin -\frac{\pi}{2}\right) - (\sin -\pi)$$

$$A_1 = -\sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi$$

$$A_1 = -1 + 0 \Rightarrow A_1 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$A_2 = [\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$A_2 = \left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A_2 = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}$$

$$A_2 = 1 + 1 \Rightarrow A_2 = 2$$

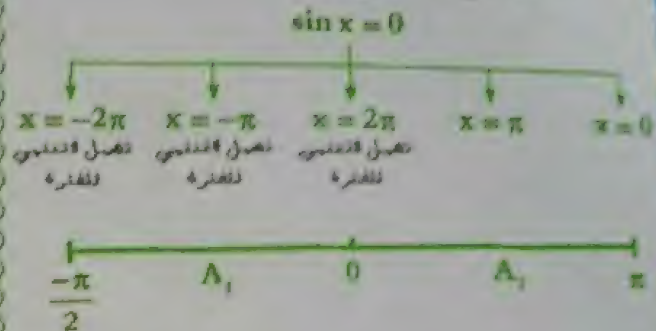
$$A_3 = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx$$

$$A_3 = [\sin x]_{\pi/2}^{\pi}$$

جد المساحة المحددة بمنحنى

مثال 8

بالدالة $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$



$$A_1 = \int_{-\pi/2}^0 \sin x \, dx$$

$$A_1 = [-\cos x]_{-\pi/2}^0$$

$$A_1 = [-\cos 0] - [-\cos -\frac{\pi}{2}]$$

$$A_1 = -(1) + 0 = -1 \Rightarrow A_1 = -1$$

$$A_2 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$A_2 = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$A_2 = (-\cos \pi) - (-\cos 0)$$

$$A_2 = -(-1) + 1 = 1 + 1 \Rightarrow A_2 = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = |-1| + |2|$$

$$A = 1 + 2 = 3 \Rightarrow A = 3 \text{ unit}^2$$

$$A_1 = \frac{-1}{3}(-1) + \frac{1}{3}(1)$$

$$A_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \, dx$$

14/2016

$$A_2 = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 \sin 3x \, dx$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$A_2 = \left[-\frac{1}{3} \cos 3 \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] - \left[-\frac{1}{3} \cos 3 \left(\frac{0}{3} \right) \right]$$

$$A_2 = \frac{-1}{3} \cos \frac{3\pi}{3} + \frac{1}{3} \cos \pi$$

$$A_2 = \frac{-1}{3}(0) + \frac{1}{3}(-1) \Rightarrow A_2 = \frac{-1}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{2}{3} \right| + \left| \frac{-1}{3} \right| = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow A = 1 \text{ unit}^2$$

$$A_1 = (\sin \pi) - (\sin \frac{\pi}{2})$$

$$A_1 = 0 - 1 \quad A_1 = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$A = |-1| + |2| + |-1| \Rightarrow A = 4 \text{ unit}^2$$

مثال 20

جد المساحة المحددة بهيكلتي

بالدالة $y = \sin 3x$ ومحاور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin 3x = 0 \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ 3x = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \, dx$$

بحث لوفير مشقة الراوية = 3

$$A_1 = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 \sin 3x \, dx$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{3} \cos 3 \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] - \left[-\frac{1}{3} \cos 3(0) \right]$$

$$A_1 = \frac{-1}{3} \cos \pi + \frac{1}{3} \cos 0$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه تحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

$$A_1 = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} - 0 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$$

2 د / 2006

2016 / خارج القطر / د 2

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos 2x$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{2} \sin \pi \right) - \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1)$$

$$A_2 = 0 - \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{1}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} \right| \Rightarrow A = 1 \text{ unit}^2$$

جد المساحة المحددة بمنحنى

مثال 11

بالدالة $y = 2 \cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

$$y = 2 \cos^2 x - 1$$

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x \quad \text{قانون}$$

$$\cos 2x = 0 \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left[2x = \frac{\pi}{2} \right] \div 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\left[2x = \frac{3\pi}{2} \right] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$



$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

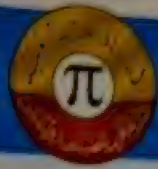
يجب توهيم مشنقة الزاوية = 2

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2x \, dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{2} \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \sin 2(0) \right]$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \sin 0 \right)$$



مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

إذا طلبت مساحة بين منحنى $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين

1 تساوي الدالتين $f(x) = g(x)$ ثم نصفر الدالة $f(x) - g(x) = 0$
الدالة الثانية = الدالة الأولى

2 قبل كل شيء، الدالة $f(x) - g(x) = 0$ هي الدالة التي نكاملها وبعدها نجد x

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

ملاحظة: لو كانت لدينا دالتين $y = x$ ، $y = \sqrt[3]{x}$

$$x = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x - \sqrt[3]{x} = 0$$

الدالة الأولى = الدالة الثانية

هذه الدالة التي نجري عليها التكامل قبل إجراء أي تعديل.

لأننا عند إيجاد x سوف نقوم بتكعيب الطرفين ثم نصفر مرة أخرى

$$x^3 = x \quad (\text{ليس هذه الدالة التي نكاملها})$$

$$x^3 - x = 0 \quad \leftarrow \text{لا تشبه هذه لا يجوز عليها التكامل هي فقط لايجاد } x$$

قبل ان تسول نفسك بتزوير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دار المغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء الملزمة مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي وقانوني (وغير مبرر الذمة) كل من يقوم بهذه الأفعال . علما ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة هذا التمايز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصله على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون العراقي المرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتوجات المخالفة واحالته الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف .
لذا اقتضى التنويه والتحذير

١٧٢٩٩١١

جد مساحة المنطقة المحصورة

مثال 13

بين المتحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

$$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{أما } x = 0$$

$$\text{أو } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$A_1 = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0$$

$$A_1 = [0] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right]$$

$$A_1 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_0^1 (x^3 - x) dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$A_2 = \left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(1)^2}{2} \right) - (0)$$

$$A_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

1 د / 2017

تمهيدي / 2015

جد المساحة المحددة بالدالتين

مثال 12

$$y = x^2, y = x^4 - 12$$

$$x^4 - 12 = x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$$

$$(x^2 + 3)(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 + 3 = 0 \text{ ليس له حل في } \mathbb{R}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \text{ بالجزء } x = \pm 2$$

$$A = \int_{-2}^2 (x^4 - x^2 - 12) dx$$



$$A = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x \right]_{-2}^2$$

$$A = \left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{(2)^3}{3} - 12(2) \right] - \left[\frac{(-2)^5}{5} - \frac{(-2)^3}{3} - 12(-2) \right]$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{24}{1} \right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + \frac{24}{1} \right)$$

$$= \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{24}{1} + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - \frac{24}{1}$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{48}{1} \text{ توحيد مقامات}$$

$$= \frac{192 - 80 - 720}{15} = \frac{-608}{15}$$

$$A = \left| \frac{-608}{15} \right| = \frac{608}{15} \text{ unit}^2$$

2 د / 1997

1 د / 2008

1 د / 2009

2016 / خارج القطر / د

2016 / خارج القطر / د

جد المساحة المحددة بالارتين

مثال 15

$y = \frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2, 5]$ $y = \sqrt{x-1}$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{1}{2}x - \sqrt{x-1} = 0$$

بالتربيع $\frac{1}{2}x = \sqrt{x-1}$ الدالة غير سالبة

$$\left[-\frac{1}{4}x^2 = x-1\right] \cdot 4$$

2 x (1997)

$$x^2 = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)(x-2) = 0$$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ ضمن حدود الفترة



$$A = \int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{x-1} \right) dx$$

$$A = \int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - (x-1)^{1/2} \right) dx \quad \text{تعديل}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \right]_2^5 \\ &= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \right]_2^5 \\ &= \left[\frac{5^2}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{(5-1)^3} \right] - \left[\frac{2^2}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{(2-1)^3} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{16}{3} - 1 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{75 - 64 - 12 + 8}{12} = \frac{7}{12}$$

$$A = \left| \frac{7}{12} \right| \Rightarrow A = \frac{7}{12} (\text{unit})^2$$

جد مساحة المنطقة المحددة

مثال 14

بالدالة $y = x$ والمنحنى $y = \sqrt{x}$

بالتكامل $x = \sqrt{x} \Rightarrow x - \sqrt{x} = 0$

بالتربيع $x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$

$$x(x-1) = 0$$

لما $x=0$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$A = \int_0^1 (x - \sqrt{x}) dx$$



2 x (2011)

$$A = \int_0^1 (x - x^{1/2}) dx \quad \text{تعديل}$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^1$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right]_0^1$$

$$A = \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1)^3} \right] - \left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{(0)^3} \right]$$

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{1} \right) - (0)$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6} \text{ unit}^2$$

$$A = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6} \text{ unit}^2$$

16

مثال

جد المساحة المحددة بالدالتين

$$x \in [0, 2\pi] \text{ حيث } g(x) = \sin x \cos x, f(x) = \sin x$$

$$g(x) = f(x)$$

$$\sin x \cos x = \sin x \Rightarrow \sin x \cos x - \sin x = 0$$

الدالة التي تكافئها

$$\sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x (\cos x - 1) = 0$$

$$\text{أما } \sin x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

$$\text{أو } \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \end{cases}$$



$$A_1 = \int_0^{\pi} (\sin x \cos x - \sin x) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x \right]_0^{\pi}$$

$$A_1 = \left(\frac{\sin^2 \pi}{2} + \cos \pi \right) - \left(\frac{\sin^2 0}{2} + \cos 0 \right)$$

$$A_1 = (0 + (-1)) - (0 + 1)$$

$$A_1 = -1 - 1 \Rightarrow A_1 = -2$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x \cos x - \sin x) dx$$

$$= \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{\sin^2 2\pi}{2} + \cos 2\pi \right) - \left(\frac{\sin^2 \pi}{2} + \cos \pi \right)$$

$$= (0 + 1) - (0 - 1)$$

$$= 1 + 1 = 2 \Rightarrow A_2 = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$= |-2| + |2| = 2 + 2 = 4 \text{ (unit)}^2$$

17 مثال

جد المساحة المحددة بالدالتين

$$g(x) = \sin x, f(x) = 2 \sin x + 1$$

$$x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ حيث}$$

$$2 \sin x + 1 = \sin x \Rightarrow 2 \sin x - \sin x + 1 = 0$$

$$\sin x + 1 = 0$$

الدالة التي تكافئها

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$



$$A_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1) dx$$

$$= [-\cos x + x]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left(-\cos \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) - (-\cos 0 + 0)$$

$$= \left(0 + \frac{3\pi}{2} \right) - (-1 + 0)$$

$$= \frac{3\pi}{2} + 1 \Rightarrow A = \left| \frac{3\pi}{2} + 1 \right| = \left(\frac{3\pi}{2} + 1 \right) \text{ unit}^2$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left(\sin -\frac{\pi}{2} + \cos -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= (1+0) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$A_1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}|$$

$$A = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1$$

$$A = 2\sqrt{2} \text{ (unit)}^2$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مشيئة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ والمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الأستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

لذا القنص التنويه والتحذير

جد مساحة المنطقة المحددة

مثال ١٥

بالمتكافئ $g(x) = \sin x, f(x) = \cos x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow \cos x - \sin x = 0$$

نقطة تقاطع

$$[\cos x = \sin x] \div \cos x \Rightarrow \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x = 1$$

$$\text{زاوية إحصاء} \quad \frac{\pi}{4} = \text{الربع الأول والثالث}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ (الربع الأول)}, \quad \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4} \text{ (الربع الثالث)}, \quad \frac{5\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$A_1 = [\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A_1 = \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left(\sin -\frac{\pi}{2} + \cos -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$A_1 = \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - (-1+0)$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (-1+0)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 1$$

$$A_1 = \sqrt{2} + 1$$

المسافة



$s(t) \leftarrow (s)$ الإزاحة
 $d(t) \leftarrow (d)$ المسافة
 $v(t) \leftarrow (v)$ السرعة
 $a(t) \leftarrow (a)$ التعجيل

$$d = \left| \int_{t_1}^{t_2} v(t) dx \right|$$

المسافة = تكامل السرعة

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dx$$

الإزاحة = تكامل السرعة

$$v = \int a(t) dx$$

السرعة = تكامل التعجيل



ملاحظات لحل الأسئلة - المسافة - السرعة - التسجيل

أولاً، إذا طلب في السؤال المسافة خلال الفترة $[a, b]$.

1) نساوي السرعة إلى الصفر ونجد قيم t .

2) إذا كانت $t \in [a, b]$ نصل. أما إذا كانت $t \notin [a, b]$ نجزء الفترة.



3) إذا كانت دالة السرعة غير موجودة فإنه يعطي التسجيل ونكامل لنجد دالة السرعة وبعدها نطبق الملاحظة 1 + 2.

ثانياً، إذا طلب الإزاحة (s) فإننا نكامل السرعة مباشرة. وإذا كانت دالة السرعة غير موجودة نطبق (3) لإيجاد دالة السرعة $v(t)$.

ثالثاً، إذا طلب بعد الجسم بعد () ثواني من بدء الحركة يقصد الإزاحة.

زمن من السؤال

$$s = \int_0^{\square} v(t) dx$$

رابعاً، إذا طلب المسافة أو غيرها خلال ثانية معينة مثلاً الثانية n

- قال ← جد المسافة خلال الثانية الثالثة معناها \int_2^3
- قال ← جد المسافة خلال الثانية الخامسة معناها \int_1^5
- قال ← جد المسافة خلال الثانية التاسعة معناها \int_8^9

$$\int_{n-1}^n$$

خامساً، إذا أعطى (سرعة + زمن عندها) ← نجد منها (c) ثابت التكامل.

سادساً، إذا ذكر في السؤال أن جسم يتحرك من السكون فإن $\begin{pmatrix} t=0 \\ s=0 \end{pmatrix}$ ونجد (c)

وإذا قال أن الجسم عاد إلى موضعه الأصلي (موضع انطلاقه) هذا يعني الإزاحة = صفر

سابعاً، الموضع أو بعد الجسم من بدء الحركة يعني الإزاحة (s)



ثانياً، الإزاحة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$

$$s = \int_1^3 (2t - 4) dt$$

$$s = [t^2 - 4t]_1^3$$

$$s = [(3)^2 - 4(3)] - [(1)^2 - 4(1)]$$

$$s = (9 - 12) - (1 - 4)$$

$$= -3 - (-3) = -3 + 3 = 0m$$

ثالثاً، المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

$$d = \int_4^5 (2t - 4) dt$$

$$2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$2 \notin [4, 5]$$

$$d = [t^2 - 4t]_4^5$$

$$d = [(5)^2 - 4(5)] - [(4)^2 - 4(4)]$$

$$d = (25 - 20) - (16 - 16)$$

$$d = 5 \Rightarrow d = |5| = 5m$$

رابعاً، بُعده بعد مضي (4) ثواني من بدء حركته.

$$s = \int_0^4 (2t - 4) dt$$

$$s = [t^2 - 4t]_0^4$$

$$s = [(4)^2 - 4(4)] - [0]$$

$$s = 16 - 16 \Rightarrow s = 0m$$

جسم يتحرك على خط مستقيم

مثال 1

بسرعة $v(t) = (2t - 4) \frac{m}{s}$ فجد:

أولاً، المسافة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$

$$2t - 4 = 0 \Rightarrow [2t = 4] + 2 \Rightarrow t = 2$$

$$t = 2 \in [1, 3]$$

$$\int_1^2 + \int_2^3$$

$$d_1 = \int_1^2 (2t - 4) dt$$

$$d_1 = \left[\frac{2t^2}{2} - 4t \right]_1^2 \Rightarrow d_1 = [t^2 - 4t]_1^2$$

$$d_1 = [(2)^2 - 4(2)] - [(1)^2 - 4(1)]$$

$$d_1 = (4 - 8) - (1 - 4)$$

$$d_1 = -4 - (-3) = -4 + 3 = -1$$

$$d_2 = \int_2^3 (2t - 4) dt$$

$$d_2 = [t^2 - 4t]_2^3$$

$$d_2 = [(3)^2 - 4(3)] - [(2)^2 - 4(2)]$$

$$= (9 - 12) - (4 - 8)$$

$$= -3 - (-4) = -3 + 4 = 1$$

$$d = |d_1| + |d_2|$$

$$d = |-1| + |1| = 2m$$

جسم يتحرك على خط مستقيم

مثال 3

يتحرك جسم بسرعة 18 m/s^2 فإذا كانت سرعته قد أصبحت 82 m/s بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة حدد:

أولاً: المسافة خلال الثانية الثالثة

$$v(t) = \int 18 \, dx$$

$$v(t) = 18t + c \rightarrow \text{السرعة}$$

* أعطى سرعة وزمن فحدد (c)

$$82 = 18(4) + c \Rightarrow 82 = 72 + c \Rightarrow c = 10$$

$$v(t) = 18t + 10 \quad \text{دالة السرعة}$$

لأنه طلب مسافة نصف السرعة

$$18t + 10 = 0 \Rightarrow t = -\frac{5}{9} \quad \text{يُهمَل}$$

$$d = \int_2^4 (18t + 10) \, dt$$

$$d = \left[\frac{18t^2}{2} + 10t \right]_2^4 \Rightarrow d = [9t^2 + 10t]_2^4$$

$$d = [9(4)^2 + 10(4)] - [9(2)^2 + 10(2)]$$

$$d = (81 + 30) - (36 + 20)$$

$$d = 111 - 56 = 55 \Rightarrow d = |55| = 55 \text{ (m)}$$

ثانياً: بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور

ثواني (3)

$$s = \int_0^3 (18t + 10) \, dt$$

$$s = [9t^2 + 10t]_0^3$$

$$s = [9(3)^2 + 10(3)] - [0]$$

$$s = 81 + 30 = 111 \text{ m}$$

جسم يتحرك على خط مستقيم

مثال 4

$$v(t) = (3t^2 - 6t + 3) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{سرعة}$$

المعطى:

المسافة المقطوعة هي الفترة $[2, 4]$

$$[3t^2 - 6t + 3 = 0] + 3 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)(t-1) = 0 \Rightarrow t-1 = 0$$

$t = 1 \notin [2, 4]$ يُهمَل لأنه لا ينتمي للفترة

$$d = \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3) \, dt$$

$$d = \left[\frac{3t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} + 3t \right]_2^4$$

$$d = [t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4$$

$$d = [(4)^3 - 3(4)^2 + 3(4)] - [(2)^3 - 3(2)^2 + 3(2)]$$

$$d = (64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)$$

$$d = 28 - 2 = 26 \Rightarrow d = |26| = 26 \text{ m}$$

ثانياً: الراحة المقطوعة في الفترة $[0, 5]$

$$s = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3) \, dt$$

$$s = [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5 \quad \text{حساب كامل اعلاه}$$

$$s = [(5)^3 - 3(5)^2 + 3(5)] - [0]$$

$$s = 125 - 75 + 15 \Rightarrow s = 65 \text{ m}$$

مثال 4

جسم يتحرك على خط مستقيم

بتسجيل قدره $(4t + 12) \text{ m/s}^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $(90) \text{ m/s}$ احسب: أولاً، السرعة عند

$t = 2$ التكامل التجميع السرعة

$$v(t) = \int (4t + 12) dt$$

$$v(t) = \frac{4t^2}{2} + 12t + c$$

$$v(t) = 2t^2 + 12t + c \quad t = 4, v = 90, c = ?$$

$$90 = 2(4)^2 + 12(4) + c$$

$$90 = 32 + 48 + c \Rightarrow 90 - 80 = c$$

$$c = 10$$

$$v(t) = 2t^2 + 12t + 10 \quad \text{السرعة}$$

$$v(2) = 2(2)^2 + 12(2) + 10$$

$$= 8 + 24 + 10 = 42 \text{ m/s}$$

ثانياً، المسافة خلال الفترة $[1, 2]$

$$[2t^2 + 12t + 10 = 0] \div 2$$

$$t^2 + 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t + 5)(t + 1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} t + 5 = 0 \Rightarrow t = -5 \\ t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \end{array} \right\} \text{يعمل}$$

$$d = \int_1^2 (2t^2 + 12t + 10) dt$$

$$d = \left[\frac{2t^3}{3} + \frac{12t^2}{2} + 10t \right]_1^2 \quad \text{عملية تكامل}$$

$$d = \left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t \right]_1^2 \quad \text{اختصار}$$

$$d = \left[\frac{2(2)^3}{3} + 6(2)^2 + 10(2) \right] - \left[\frac{2(1)^3}{3} + 6(1)^2 + 10(1) \right]$$

الأعلى

الأدنى

توضيح

$$d = \left(\frac{16}{3} + 24 + 20 \right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10 \right)$$

$$d = \frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16$$

$$d = \frac{14}{3} + 28 \Rightarrow d = \left| \frac{98}{3} \right| = \frac{98}{3} \text{ m}$$

ثالثاً، الإزاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

$$s = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10) dt$$

$$s = \left[\frac{2t^3}{3} + \frac{12t^2}{2} + 10t \right]_0^{10}$$

$$s = \left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t \right]_0^{10}$$

$$s = \left[\frac{2(10)^3}{3} + 6(10)^2 + 10(10) \right] - [0]$$

$$s = \frac{2000}{3} + 600 + 100$$

$$s = \frac{2000 + 1800 + 300}{3} = \frac{4100}{3}$$

$$s = 1366 \frac{2}{3} \text{ m}$$

ننظر نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2) \text{ m/s}$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول الذي بدأت منه ثم احسب التسجيل عندها.

$$v(t) = 100t - 6t^2$$

$$s = \int (100t - 6t^2) dt$$

$$s = 50t^2 - 2t^3 + c \quad \left. \begin{array}{l} s = 0 \\ t = 0 \end{array} \right\} \text{ من السكون}$$

$$s = 50(0)^2 - 2(0)^3 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore s = 50t^2 - 2t^3 \quad \text{الإزاحة}$$

عودة النقطة الى موضع الإنطلاق يعني ان الإزاحة تساوي صفر (فيزيائياً)

$$[50t^2 - 2t^3 = 0] \div 2$$

$$25t^2 - t^3 = 0$$

$$t^2 (25 - t) = 0$$

$$\text{بالبندر} \quad t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{أو}$$

$$25 - t = 0 \Rightarrow t = 25$$

$$a(t) = 100 - 12t \quad \text{التسجيل} = (\text{مشتقة السرعة})$$

$$a(t) = 100 - 12(25)$$

$$= 100 - 300 = -200 \text{ m/s}^2$$

الحجوم الدورانية

أولاً: حساب حجم الشكل المتولد من الدورات حول محور السينات:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$\left. \begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array} \right\} \rightarrow \text{المستقيمين}$$

ثانياً: حساب حجم الشكل المتولد من الدورات حول محور الصادات:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$\left. \begin{array}{l} y = a \\ y = b \end{array} \right\} \rightarrow \text{المستقيمين}$$

ملاحظات

- 1 عندما يطلب في السؤال الدورات حول محور السينات نبدأ بترتيب المعادلة لنحصل على (y^2) لذلك نضع الـ y في طرف وباقي الحدود الآخر.
- 2 عندما يطلب في السؤال الدورات حول محور الصادات نبدأ بترتيب المعادلة لنحصل على (x^2) لذلك نضع الـ x في طرف وباقي الحدود الآخر.
- 3 بعد أن نحصل على (y^2) أو (x^2) نعوض بالقانون ثم نجري عملية التكامل وعلينا الإنتباه إلى حدود التكامل.
- أ إذا طلبت دورات حول محور السينات وأعطى $y = a$, $y = b$ نعوض y بالدالة ونجد x لأن حدود التكامل في قانون الدورات حول محور السينات هي $x = b$, $x = a$ وإذا طلبت دورات حول محور الصادات وأعطى $x = a$, $x = b$ نعوض x بالدالة ونجد y .
- ب إذا أعطى حدود مباشرة تكامل بدون تعويض.
- 4 يمكن ربط الحجوم الدورانية مع القطوع المخروطية (سنطرق لذلك).

مثال 3

أوجد الحجم الناتج من دورات المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 2$ حول المحور السيني.

الدورات حول محور السينات تحتاج y^2

$$y = x^2 \Rightarrow y^2 = x^4$$

وحدود التكامل بدلالة x نستخدم القانون مباشرة

$$v = \pi \int_1^2 y^2 dx \Rightarrow v = \pi \int_1^2 x^4 dx$$

$$v = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{(1)^5}{5} \right]$$

$$v = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right) \Rightarrow v = \frac{31}{5} \pi \text{ (unit)}^3$$

مثال 4

أوجد الحجم الناتج من دورات

المساحة المحصورة بين المنحنى $y^2 = x^3$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ حول المحور السيني.

الدورات حول محور السينات y^2 جاهزة وحدود التكامل بدلالة x

$$v = \pi \int_0^2 y^2 dx \Rightarrow v = \pi \int_0^2 x^3 dx$$

$$v = \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2$$

$$v = \pi \left(\frac{(2)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4} \right) \Rightarrow v = 4\pi \text{ (unit)}^3$$

المنطقة بين المنحنى $y = \sqrt{x}$

ومحور السينات دارة حول محور السينات، جد حجمها.

الدورات حول محور السينات تحتاج y^2 وحدود التكامل بدلالة x

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$$

$$v = \pi \int_0^2 y^2 dx \text{ قانون}$$

$$v = \pi \int_0^2 x dx \text{ نعويض بالقانون}$$

$$v = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \text{ تكامل}$$

$$v = \pi \left[\frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] \text{ نعويض}$$

$$v = 16\pi \text{ (unit)}^3 \text{ ناتج}$$

مثال 5 أوجد الحجم الناتج من دورات

المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ حول المحور السيني.

الدورات حول محور السينات تحتاج y^2 هي جاهزة من المعطيات $y^2 = 8x$

وحدود التكامل بدلالة x لذلك تكامل مباشر

$$v = \pi \int_0^2 y^2 dx \Rightarrow v = \pi \int_0^2 8x dx$$

$$v = \pi \left[\frac{8x^2}{2} \right]_0^2 \Rightarrow v = \pi [4x^2]$$

$$v = \pi [4(2)^2 - 4(0)^2]$$

$$v = \pi (16) \Rightarrow v = 16\pi \text{ (unit)}^3$$



أوجد الحجم الناشئ من دورات

مثال 7

المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $1 \leq y \leq 3, y = \frac{3}{x}$ حول المحور الصادي

$$y = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{y} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{y^2}$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy \quad \text{القانون}$$

$$v = \pi \int_1^3 (9y^{-2}) dy \quad \text{التعويض}$$

$$= \pi \left[\frac{9y^{-1}}{-1} \right]_1^3 \quad \text{التكامل}$$

$$= \pi \left[\frac{-9}{y} \right]_1^3 \quad \text{تعويض بحدود التكامل}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{-9}{3} \right) - \left(\frac{-9}{1} \right) \right]$$

$$= \pi (-3 + 9) = 6\pi \text{ unit}^3$$

أوجد الحجم الناتج من دورات

مثال 5

المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0, x = 5$ حول المحور x .

$$y = 2x^2 \Rightarrow y^2 = 4x^4$$

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx \Rightarrow v = \pi \int_0^5 4x^4 dx$$

$$v = \pi \left[\frac{4x^5}{5} \right]_0^5$$

$$v = \pi \left[\frac{4(5)^5}{5} - \frac{4(0)^5}{5} \right]$$

$$v = \pi \left(\frac{12500}{5} \right) \Rightarrow v = 2500\pi \text{ (unit)}^3$$

أوجد الحجم الناتج من دورات

مثال 6

المساحة المحدد بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 0, y = 16$ حول المحور y .

الدورات حول محور الصادات نحتاج x^2

$$[y = 4x^2] \div 4 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{4}$$

حدود التكامل بدلالة y نستخدم القانون مباشرة

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy \Rightarrow v = \pi \int_0^{16} \left(\frac{y}{4} \right) dy$$

$$v = \pi \left[\frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{4} \right]_0^{16} \Rightarrow v = \pi \left[\frac{y^2}{8} \right]_0^{16}$$

$$v = \pi \left[\frac{(16)^2}{8} - \frac{(0)^2}{8} \right] \Rightarrow v = 32\pi \text{ (unit)}^3$$



أحسب الحجم المتولد من دورات

مثال 10

المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمنحني $y = 4$ حول المحور الصادي.

نعوض $x = 0$ لنجد y

$$y^2 + 0 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

بالتربيع $y + x = 1 \Rightarrow x = 1 - y^2$

$$x^2 = (1 - y^2)^2$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_{-1}^1 (1 - y^2)^2 dy$$

نفتح التربيع لعدم توفر مشتقة داخل القوس

$$v = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy$$

$$v = \pi \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1$$

$$v = \pi \left[\left(1 - \frac{2(1)^3}{3} + \frac{(1)^5}{5} \right) - \left((-1) - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5} \right) \right]$$

$$v = \pi \left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right]$$

$$v = \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$v = \frac{15 - 10 + 3 + 15 - 10 + 3}{15}$$

$$v = \frac{16}{15} \text{ unit}^3$$

أوجد الحجم الناتج من دورات

مثال 9

المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2 + 1$ والمنحني $y = 4$ حول المحور الصادي.

أعطى $y = 4$ نحتاج قيمة أخرى لـ y نعوض $x = 0$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow y = (0)^2 + 1 \Rightarrow y = 1$$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1 \quad \begin{matrix} y=4 \\ y=1 \end{matrix}$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_1^4 (y - 1) dy$$

$$v = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^4$$

$$v = \pi \left[\left(\frac{4^2}{2} - 4 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right]$$

$$v = \pi \left[4 - \frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{9}{2} \pi \text{ (unit)}^3$$

المنطقة المحددة بين المنحني

مثال 8

المنطقة المحددة بين المنحني $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ ودورات $1 \leq y \leq 4$ حول محور الصادات

محددها.

$$x = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{y}$$

$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy$$

$$v = \pi [\ln y]$$

$$v = \pi [\ln 4 - \ln 1]$$

$$v = \pi \ln 2^2$$

$$v = 2\pi \ln 2 \text{ unit}^3$$

الأسنان حيدر وليد

المُسْنَد فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



2021

5

المعادلات التفاضلية

الفصل الخامس

الأحيائي و التطبيقي

07702729223



ملازم دار المغرب

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

Nots:



المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ



07702729223



ملازم دار الفرقان

هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة.
هي رتبة أعلى مشتقة.

هي أكبر أس مرفوع له أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.

المعادلة التفاضلية

المرتبة (الرتبة)

الدرجة

الدرجة	الرتبة	المعادلة التفاضلية
الأولى	الأولى	1 $\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$
الأولى	الثانية	2 $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$
الثالثة	الثالثة	3 $(\ddot{y})^2 + \ddot{y} - y = 0$
الأولى	الثانية	4 $\ddot{y} + 2y (\dot{y})^2 = 0$
الرابعة	الأولى	5 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = x^2 - 5$
الأولى	الرابعة	6 $y^{(4)} + \cos y + x^2 y \ddot{y} = 0$
الثانية	الثالثة	7 $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 3y = 0$
الثالثة	الثالثة	8 $(\ddot{y})^3 - 2\ddot{y} + 8y = x^2 + \cos x$
الأولى	الأولى	9 $(x^2 - y^2) + 3xy \frac{dy}{dx} = 0$
الأولى	الثانية	10 $\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 5y = 7$
الثانية	الثالثة	11 $x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2 \frac{d^2y}{dx^2} 3y = 0$

ما رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية التالية: $(\bar{y})^2 = \sqrt{1 + (\bar{y})^2}$



بالتربيع $\Rightarrow (\bar{y})^2 = \sqrt{1 + (\bar{y})^2}$ نتخلص من الجذر بالتربيع $(\bar{y})^4 = 1 + (\bar{y})^2$

الرتبة \leftarrow الثانية الدرجة \leftarrow الرابعة

كيف أعرف درجة ورتبة المعادلة التفاضلية؟



ننظر إلى أعلى مشتقة / أعلى مشتقة تهمل الرتبة ثم نأخذ أس أعلى مشتقة فهو يهمل الدرجة.



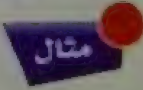
$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^2 + 2 \frac{d^2y}{dx^2}$$



أعلى مشتقة هي الثالثة $\frac{d^3y}{dx^3}$ \leftarrow أي رتبة ثلاثة

وننظر إلى أس هذه مشتقة وهو $\left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^2$ \leftarrow أي الدرجة الثانية.

$$\bar{y} = (\bar{y})^5 - 1$$



أعلى مشتقة \bar{y} \leftarrow رتبة ثانية

أس هذه المشتقة وهو $(1) \leftarrow (\bar{y})$ (درجة أولى).

سؤال 4 برهن ان $y = 3 \cos 2x + 2 \sin 2x$

هو حلًا للمعادلة التفاضلية $\ddot{y} + 4y = 0$

$$y = 3 \cos 2x + 2 \sin 2x$$

$$\ddot{y} = 3(-\sin 2x)(2) + 2(\cos 2x)(2)$$

$$\ddot{y} = -6 \sin 2x + 4 \cos 2x$$

$$\ddot{y} = -6(\cos 2x)(2) + 4(-\sin 2x)(2)$$

$$\ddot{y} = -12 \cos 2x - 8 \sin 2x$$

$$\ddot{y} + 4y = 0$$

$$(-12 \cos 2x - 8 \sin 2x) + 4(3 \cos 2x + 2 \sin 2x) = 0$$

$$-12 \cos 2x - 8 \sin 2x + 12 \cos 2x + 8 \sin 2x = 0$$

$$0 = 0$$

$$RHS = LHS$$

وعليه تكون $y = 3 \cos 2x + 2 \sin 2x$ حلًا للمعادلة التفاضلية.

حل $y = x^3 + x - 2$ حلًا للمعادلة

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x$$

$$y = x^3 + x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 6x$$

وعليه تكون $y = x^3 + x - 2$ حلًا للمعادلة التفاضلية.

حل $y = x + 2$ حلًا للمعادلة

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = x$$

$$y = x + 2$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + y = x$$

$$0 + 3(1) + x + 2 = x$$

$$3 + x + 2 = x$$

$$5 + x \neq x$$

$$RHS \neq LHS$$

وعليه تكون العلاقة $y = x + 2$ ليست حلًا للمعادلة التفاضلية.

برهن ان $y = \sin x$ حلًا للمعادلة

$$\ddot{y} + y = 0$$

$$y = \sin x \Rightarrow \ddot{y} = -\sin x$$

$$\ddot{y} + y = 0$$

$$-\sin x + \sin x = 0$$

$$0 = 0$$

$$RHS = LHS$$

وعليه تكون $y = \sin x$ حلًا للمعادلة التفاضلية $\ddot{y} + y = 0$.

سؤال 5 برهن ان $s = 8 \cos 3t + 6 \sin 3t$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

$$s = 8 \cos 3t + 6 \sin 3t$$

المعادلة التفاضلية

$$\frac{ds}{dt} = 8 (-\sin 3t)(3) + 6 (\cos 3t)(3)$$

$$\frac{ds}{dt} = -24 \sin 3t + 18 \cos 3t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -24 (\cos 3t)(3) + 18 (-\sin 3t)(3)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -72 \cos 3t - 54 \sin 3t$$

المشتقة الثانية

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0 \quad (\text{نعوض بمعادلة السؤال الأصلية})$$

$$\begin{aligned} -72 \cos 3t - 54 \sin 3t + 9(8 \cos 3t + 6 \sin 3t) &= 0 \\ -72 \cos 3t - 54 \sin 3t + 72 \cos 3t + 54 \sin 3t &= 0 \\ 0 &= 0 \\ \text{R.H.S} &= \text{L.H.S} \end{aligned}$$

وعليه تكون العلاقة $s = 8 \cos 3t + 6 \sin 3t$ حلاً للمعادلة التفاضلية .

فكرت المعادلة
 $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$
 تحتاج المشتقة الثانية
 والعلاقة الأصلية



حل ان $y = \tan x$ حل للمعادلة $\bar{y} = 2y(1+y^2)$

$$y = \tan x \Rightarrow \bar{y} = \sec^2 x \Rightarrow \bar{y} = (\sec x)^2$$

$$\bar{y} = 2(\sec x)^2 \sec x \tan x$$

$$\bar{y} = 2\sec^2 x \tan x$$

$$\bar{y} = 2y(1+y^2) \text{ (نعوض بمعادلة السؤال الأصلية)}$$

$$2\sec^2 x \tan x = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$2\sec^2 x \tan x = 2 \tan x \sec^2 x$$

$$RHS = LHS$$

قانون $\sec^2 x$

نعامل
معادلة القوس المرفوع الى
الأس حسب اختلافها

وعليه تكون العلاقة $y = \tan x$ حل للمعادلة التفاضلية.

بين ان $y = ae^{-x}$ حل للمعادلة التفاضلية $\bar{y} + y = 0$ حيث $a \in \mathbb{R}$

$$y = ae^{-x} \Rightarrow \bar{y} = a(-1)e^{-x}$$

$$\bar{y} = -ae^{-x}$$

نفس الحالة \leftarrow بشقفة الأس \leftarrow

نعوض بعلاقة السؤال (المعادلة التفاضلية)

$$\bar{y} + y = 0$$

$$-ae^{-x} + ae^{-x} = 0$$

$$0 = 0$$

$$RHS = LHS$$

وعليه تكون العلاقة $y = -ae^{-x}$ حل للمعادلة التفاضلية.

بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حل للمعادلة التفاضلية $\bar{y} + \bar{y} - 6y = 0$

$$y = e^{2x} + e^{-3x} \Rightarrow \bar{y} = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$$

$$\bar{\bar{y}} = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

$$\bar{\bar{y}} + \bar{y} - 6y = 0$$

$$4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x}) = 0$$

$$6e^{2x} + 6e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} = 0$$

$$0 = 0$$

$$RHS = LHS$$

وعليه تكون العلاقة $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حل للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + \bar{y} - 6y = 0$

إذا كانت العلاقة اشتقاقية فهي علاقة في العالم لا تحتاج النصوص هي البساطة التفاضلية
وانما كل الشغل هي العلاقة حيث نشترك العلاقة ثم نقاربت النتائج بالمعادلة التفاضلية

ملاحظة

كيف تعرف ان العلاقة ضمنية؟

سؤال

عندما لا تكون بدالة $y = \square \mp \square$
حدود تحتوي X فقط ← حدود تحتوي X فقط

جواب

$$y = x^3 - x + 2$$

$$y = x^2 + 5$$

$$y = \tan x$$



ليست ضمنية لأنها بدالة y فقط

$$y^2 = 3x^2 + 5$$

$$\ln |y| = 5x + e^x$$

$$y^3 = 5x + y$$

$$\sin xy = 5x + 1$$



ضمنية

توضيح

عندما تكون (y) وحدها بدون تربيع وتكعيت او شيء اخر نقول ليست ضمنية اما
 e^x , $\ln y$, y^3 , y^2 فإنها ضمنية حتى ان كانت وحدها بطرف.

قبل ان تسول نفسك بشروير ونشر وسحب ملازمنا (ملازم دارالمغرب) من الانترنت واستنساخها عن طريق برامج
التواصل الاجتماعي او ايصالها بالموبايل او اجهزة نقل الملفات الى اصحاب المكتبات وسحبها او شراء القرص
مستنسخة وبيعها او عن اي طريق يؤدي الى ضرر المطبعة سواء كان من الوكيل او غيره لكون فيها اشكال شرعي
وقانوني (ولغير مسيرك الذمة) كل من يقوم بهذه الافعال علما ان ملازمنا موثقة من دار الكتب والوثائق وحائزة
على علامة تجارية من وزارة الصناعة / دائرة التطوير والتنظيم الصناعي وتؤكد واحذر ان هناك عقوبات بحق
هذا التجاوز لان ملازمنا مسجلة بصورة قانونية وحاصلة على شهادة تسجيل وان عقوبة ذلك موجودة في القانون
العرفي المرقم (٢١) لسنة (١٩٥٧) والمعدل برقم (٨٠) في ٢٦ / ٤ / ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة النتوجات المعالمة
واحالتها الى السلطات القانونية وفي هذا القانون عقوبات اخرى بحق المخالف .
لذا اقتضى التنويه والتحذير .

تحذير هام جدا



هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلًا للمعادلة التفاضلية $y\bar{y} + (\bar{y})^2 - 3x = 5$ (العلاقة ضمنية)

$$2y\bar{y} = 6x + 3x^2$$

$$[2(y\bar{y} + \bar{y}\bar{y}) = 6 + 6x] \div 2 \Rightarrow y\bar{y} + (\bar{y})^2 = 3 + 3x$$

$$y\bar{y} + (\bar{y})^2 - 3x = 3$$

$$y\bar{y} + (\bar{y})^2 - 3x = 3 \neq 5$$

ليست حلًا للمعادلة التفاضلية.

بين أن $\text{Lny}^2 = x + a$ ، $a \in \mathbb{R}$ حلًا للمعادلة التفاضلية $2\bar{y} - y = 0$

$$\text{Lny}^2 = x + a \Rightarrow 2\text{Lny} = x + a$$

$$\left[2 \cdot \frac{y}{y} = 1\right] \cdot y$$

$$2\bar{y} = y \Rightarrow 2\bar{y} - y = 0$$

$\therefore \text{Lny}^2 = x + a$ حلًا للمعادلة التفاضلية $2\bar{y} - y = 0$

$$\left[\frac{2y/y}{y^2} = 1\right] \cdot y$$

$$2y = \bar{y} \Rightarrow 2\bar{y} - y = 0$$

بين أن $\text{Ln}|y| = x^2 + c$ ، $c \in \mathbb{R}$ حلًا للمعادلة التفاضلية $\bar{y} = 4x^2y + 2y$

$$\text{Ln}|y| = x^2 + c \rightarrow \text{العلاقة ضمنية}$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = 2x \Rightarrow \left[\frac{\bar{y}}{y} = 2x\right] \cdot y \Rightarrow \bar{y} = 2x \cdot y$$

$$\bar{y} = 2(x\bar{y} + y \cdot (1))$$

$$\bar{y} = 2x\bar{y} + 2y$$

فنتخلص من \bar{y} لأن معادلة
الصفر خالية من \bar{y}

$$\bar{y} = 2x(2x\bar{y} + 2y)$$

$\therefore \bar{y} = 4x^2y + 2y$ حلًا للمعادلة التفاضلية.

سؤال 12/14 هل $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة

التفاضلية $x\bar{y} + 2\bar{y} + 25xy = 0$

المتناقض ضمني

حاصل ضرب دالين

$$y(1) + x(\bar{y}) = 5 \cos 5x$$

نشتق العلاقة المتناقض لاني

$$y + x\bar{y} = 5 \cos 5x$$

$$\bar{y} + x\bar{\bar{y}} + \bar{y}(1) = -5 \sin 5x \quad (5)$$

$$2\bar{y} + x\bar{\bar{y}} = -25 \sin 5x$$

$$x\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} + 25 \sin 5x = 0$$

عليه تكون العلاقة $yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة

سؤال 15 هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلاً للمعادلة

$$y^3\bar{y} = -2$$

$$2x^2 + y^2 = 1$$

$$[4x + 2y\bar{y} = 0] + 2 \Rightarrow 2x + y\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{-2x}{y} \quad \dots (1)$$

$$\bar{\bar{y}} = \frac{(y)(-2) - (-2x)(\bar{y})}{y^2} \Rightarrow \left[\bar{\bar{y}} = \frac{-2y + 2xy}{y^2} \right] \cdot y^2$$

$$y^3\bar{\bar{y}} = -2y + 2xy \quad \leftarrow \text{تعويض}$$

$$[y^3\bar{\bar{y}} = -2y + 2xy \cdot \frac{-2x}{y}] \cdot y \Rightarrow y^3\bar{\bar{y}} = -2y^2 - 4x^2$$

$$y^3\bar{\bar{y}} = -2(y^2 + 2x^2)$$

علاقة السؤال = 1

$$y^3\bar{\bar{y}} = -2$$

عليه تكون $y^3\bar{\bar{y}} = -2$ حلاً للمعادلة التفاضلية

سؤال 12/12 بين أن العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً

للمعادلة التفاضلية $x\bar{y} = x^2 + y$

$$y = x^2 + 3x \Rightarrow \bar{y} = 2x + 3$$

$$x\bar{y} = x^2 + y \quad (\text{معادلة السؤال الأصلية})$$

$$x(2x + 3) = x^2 + \frac{x^2 + 3x}{y}$$

$$2x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$$

$$R.H.S = L.H.S$$

عليه تكون العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة

سؤال 13 اثبت أن $y = x \ln |x| - x$ أحد

$$\frac{xdy}{dx} = x + y$$

$$y = x \ln |x| - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[x \cdot \frac{1}{x} + \ln |x| (1) \right] - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln |x| - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln |x|$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = x + y$$

$$x \cdot \ln |x| = x + x \ln |x| - x$$

$$x \ln |x| = x \ln |x|$$

$$R.H.S = L.H.S$$

عليه تكون $y = x \ln |x| - x$ حلاً للمعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية

طريقة فصل المتغيرات

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + c$$

بعض ملاحظات

1. ان وجدنا \bar{y} بالمعادلة في السؤال نعوض بدلا لها $\frac{dy}{dx}$.
2. نضرب طرفي المعادلة بـ dx ان وجدناها بالبقاء.
3. عند عزل المتغيرات نقسم على العنصر غير المرغوب به.

مثلا:

1 $[2x dy = 3 dx] \div x$ غير مرغوب به

← غير مرغوب به لأنه x في طرف dy لم تكمل الحل $2 dy = \frac{3}{x} dx$ →

2 $[\sin x dy = \cos x dx] \div \sin x$

← غير مرغوب به لأنه x في طرف dy لم تكمل الحل $dy = \frac{\cos x}{\sin x} dx$ →

3 $[3y dx = 5 dy] \div y$

← غير مرغوب به لأنه y في طرف dx لم تكمل الحل $3 dx = \frac{5}{y} dy$ →

سؤال 3 حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات.

$$(y^2 + 4y - 1) \bar{y} = x^2 - 2x + 3$$

$$\left[(y^2 + 4y - 1) \frac{dy}{dx} = (x^2 - 2x + 3) \right] \cdot dx$$

نضرب بـ dx سوف تنفصل المتغيرات

$$\int (y^2 + 4y - 1) dy = \int (x^2 - 2x + 3) dx$$

$$\frac{y^3}{3} + \frac{4y^2}{2} - y = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x + c$$

$$\left[\frac{y^3}{3} + 2y^2 - y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c \right] \cdot 3$$

$$y^3 + 6y^2 - 3y = x^3 - 3x^2 + 9x + c_1$$

سؤال 4 حل المعادلة $y\bar{y} = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

$$\left[y \frac{dy}{dx} = 4 \cdot (1+y^2)^{\frac{3}{2}} \right] \cdot dx$$

نتخلص من الجذر

$$y dy = 4 (1+y^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

غير مرغوب فيه
نقسم عليه لأنه y في طرف dx

$$\frac{y dy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4 (1+y^2)^{\frac{3}{2}} dx}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int y (1+y^2)^{-\frac{3}{2}} dy = \int 4 dx$$

تكامل فودس

$$\frac{1}{2} \int 2y (1+y^2)^{-\frac{3}{2}} dy = \int 4 dx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{1} (1+y)^{-\frac{1}{2}} = 4x + c$$

سؤال 1 حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

$$\left[\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \right] \cdot dx$$

نضرب بـ

$$dy = (2x + 5) dx$$

ثم نعمل المتغيرات

$$\int dy = \int (2x + 5) dx$$

تكامل الطرفين

$$y = \frac{2x^2}{2} + 5x + c \Rightarrow y = x^2 + 5x + c$$

سؤال 2 حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

ضرب الطرفين \times الوسطين سوف يحل مشكلة السؤال وتنفصل المتغيرات.

$$y dy = (x - 1) dx$$

تكامل الطرفين

$$\int y dy = \int (x - 1) dx$$

$$\left[\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c \right] \cdot 2$$

$$y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

بالجذر التربيعي

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + c_1}$$

سؤال 6 حل المعادلة التفاضلية $\bar{y} = 2e^x y^3$

بطريقة فصل المتغيرات عندما $x=0, y=\frac{1}{2}$

$$\left[\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \right] \cdot dx$$

$$[dy = 2e^x y^3 dx] + y^3 \text{ غير مرغوب فيه}$$

$$\frac{dy}{y^3} = \frac{2e^x y^3 dx}{y^3}$$

$$\int y^{-3} dy = 2 \int e^x dx \text{ تكامل الطرفين}$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c \quad x=0, y=\frac{1}{2} \text{ نعوض}$$

$$\frac{-1}{2(\frac{1}{2})^2} = 2e^0 + c$$

$$\frac{-1}{2(\frac{1}{4})} = 2 + c \Rightarrow \frac{-1}{\frac{1}{2}} = 2 + c$$

$$-2 - 2 = c$$

$$c = -4$$

$$\left[\frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4 \right] \cdot -2$$

$$\frac{1}{y^2} = -4e^x + 8 \Rightarrow \frac{1}{-4e^x + 8} = y^2$$

$$y^2 = \frac{1}{8 - 4e^x} \text{ بالجذر التربيعي}$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{8 - 4e^x}}$$

$$\frac{-1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 4x + c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$$

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{-1}{4x+c}$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$x=2, y=9 \text{ عندما } \bar{y} - x\sqrt{y} = 0$$

$$\bar{y} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = x\sqrt{y}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} = x \cdot y^{\frac{1}{2}} \right] dx$$

$$dy = x \cdot y^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{x y^{\frac{1}{2}} dx}{y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x dx$$

$$\frac{2}{1} y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\left[2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c \right] + 2$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + \left(\frac{c}{2} \right) = c_1 \text{ بالتربيع}$$

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c_1 \right)^2$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 9

$$e^{x+2y} + \bar{y} = 0$$

$$e^{x+2y} + \bar{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^{x+2y}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} = -e^x \cdot e^{2y} \right] dx \Rightarrow dy = -e^x \cdot e^{2y} dx$$

(عبر مرعوب فيه)

$$\frac{dy}{e^{2y}} = \frac{-e^x \cdot e^{2y} dx}{e^{2y}}$$

$$\int e^{-2y} dy = -\int e^x dx$$

نوفر مشتقة الأس

$$\frac{-1}{2} \int -2e^{-2y} dy = -\int e^x dx$$

$$\frac{-1}{2} e^{-2y} = -e^x + c$$

$$\frac{-1}{2e^{2y}} = -e^x + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 10

$$y \neq (2n+1) \frac{\pi}{2} \text{ حيث } dy = \sin x \cos^2 y dx$$

$$[dy = \sin x \cos^2 dx] + \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x dx \quad \text{تكامل الطرفين}$$

$$\int \sec^2 y dy = \int \sin x dx$$

$$\tan y = -\cos x + c$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-2y}$$

حل المعادلة

سؤال 7

$$x=0, y=0 \text{ عندما}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} = e^{x-2y} \right] dx \Rightarrow dy = e^{x-2y} dx$$

$$e^{-2y} dy = e^x dx$$

$$-\int e^{-2y} dy = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx$$

$$-e^{-2y} = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

نعويض

$$-e^0 = \frac{1}{2} e^0 + c$$

$$-1 = \frac{1}{2} + c \quad c = \frac{3}{2}$$

$$-e^{-2y} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-1}{e^y} = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\left[\frac{-1}{e^y} = \frac{e^{2x}-3}{2} \right] \times (-1)$$

$$\frac{1}{e^y} = \frac{3-e^{2x}}{2}$$

يمكن التوقف هنا

$$e^y = \frac{2}{3-e^{2x}}$$

Ln للطرفين

$$y = \ln \left| \frac{2}{3-e^{2x}} \right|$$

$$e^x dx - y^3 dy = 0 \text{ حل المعادلة}$$

سؤال 8

$$\int e^x dx = \int y^3 dy \quad \text{نحول y للطرف الأيمن}$$

نضرب المتغيرات

$$\int y^3 dy = \int e^x dx$$

$$\left[\frac{y^4}{4} = e^x + c \right] \times (-4)$$

$$y^4 = 4e^x + 4c \quad \text{بالجذر الرابع}$$

$$y = \sqrt[4]{4e^x + c_1}$$

حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات

سؤال 13

$$y \cos^3 x = \sin x$$

$$\left[\frac{dy}{dx} \cos^3 x = \sin x \right] \cdot dx$$

$$\frac{dy \cos^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$\int dy = \int \sin x \cdot (\cos x)^{-3} dx$$

مشتقة الـ $\cos \Leftarrow -\sin$ نحتاج (-1)

$$\int dy = - \int -\sin x (\cos x)^{-3}$$

$$y = -\frac{\cos^{-2} x}{-2} + c$$

$$y = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$$

يمكن التوقف إلى هنا

$$y = \frac{1}{2} \sec^2 x + c$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية

سؤال 11

$$x \cos^2 y dx + \tan y dy = 0$$

$$\frac{\tan y dy}{\cos^2 y} = \frac{-x \cos^2 y dx}{\cos^2 y}$$

$$\int \frac{1 \tan y}{\cos^2 y} dy = \int -x dx$$

$$\int \sec^2 y \cdot \tan y dy = \int -x dx$$

$$\left[\frac{\tan^2 y}{2} = \frac{-x^2}{2} + c \right] \cdot 2 \Rightarrow \tan^2 y = -x^2 + c$$

للسؤال طريقة أخرى لكن نكتفي بهذه الطريقة فهي الأسهل.

أوجد حل المعادلة التفاضلية

سؤال 12

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$$

$$\left[\sin x \cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x \sin y \right] \cdot dx$$

$$\sin x \cos y dy = -\cos x \sin y dx$$

غير مرغوب غير مرغوب

نقسم على $\sin y \cdot \sin x$ لأنها غير مرغوب

$$\frac{\sin x \cos y dy}{\sin y \sin x} = \frac{-\cos x \sin y}{\sin y \sin x} dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln |\sin y| = -\ln |\sin x| + c$$

قد يعال الطالب لماذا لم يعوض بـ $\frac{\cos}{\sin}$ بقانون cot

جواب: لو اعتبرنا $\frac{\cos}{\sin}$ بـ cot يتوقف الحل لعدم

وجود تكامل مباشر لها في الجدول

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

سؤال 16

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$$

* نضرب بـ dx ثم نقسم على العنصر غير مرغوب فيه

$$[dy = (x+1)(y-1) dx] \div (y-1)$$

نقسم على $(y-1)$ لأنه y في طرف

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1) dx$$

$$\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + x + c$$

ياخذ (e) للطرفين

$$y-1 = e^{\frac{x^2}{2} + x + c}$$

يمكن التوقف هنا

$$\therefore y = e^{\frac{x^2}{2} + x + c} + 1$$

حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات.

سؤال 17

$$(x+1) \frac{dy}{dx} = 2y$$

نضرب بـ dx

$$[(x+1) dy = 2y dx] \div (x+1) \cdot y$$

غير مرغوب فيه

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1} dx$$

نكامل الطرفين

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y| = 2 \cdot \ln|x+1| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 14

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$$

مجرد ضرب طرفي التناصب لنفصل المتغيرات

$$\int (3y^2 + e^y) dy = \int \cos x dx$$

$$\frac{\cancel{y}^3}{\cancel{3}} + e^y = \sin x + c$$

$$y^3 + e^y = \sin x + c$$

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

سؤال 15

$$\tan^2 y dy = \sin^3 x dx$$

= لاحظ ان متغيرات المعادلة منفصلة مباشرة فنجري عملية التكامل فقط عليك مراجعة تكامل $\sin^3 x$ و $\tan^2 x$ في التكامل فهذا السؤال عبارة عن تكامل مباشر.

$$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1) dy = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

$$\int \sec^2 y dy - \int dy = \int \sin x dx - \int \sin x \cos^2 x dx$$

الآن تكامل مباشرة

$$\tan y - y = \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$$\int -\sin x \cos^2 x dx$$

* ربما يتساءل عن تكامل الحد الأخير فوس مرفوع إلى اس $(\cos x)^2 \rightarrow$

مشتقة داخل قوس $-\sin x \rightarrow$

نعمل مع (-) لأن الإشارة (-) داخل مع الأفعال فأصبحت بعد التكامل (+).

حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات .

سؤال 19

$$xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$$

$$xy \frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - y^2$$

$$\left[xy \frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \right] dx$$

$$xy dy = (1 - 2y^2) dx$$

غير مرغوب فيه → غير مرغوب فيه →
نقسم الطرفين $(1 - 2y^2)$ و x لأنها عناصر ليست في طرفها المناسب .

$$\frac{xy dy}{x (1 - 2y^2)} = \frac{(1 - 2y^2)}{x (1 - 2y^2)} dx$$

$$\frac{1}{-4} \int \frac{-4y dy}{1 - 2y^2} = \int \frac{dx}{x}$$

مشتقة المقام $(-4y)$

$$\frac{1}{-4} \ln |1 - 2y^2| = \ln |x| + c$$

حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات .

18

$$\frac{dy}{dx} + xy = 3x \quad x=1, y=2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy$$

$$\left[\frac{dy}{dx} = x(3 - y) \right] dx$$

$$[dy = x(3 - y) dx] \div 3 - y$$

نقسم على $(3 - y)$
لنأخذ طرف dx

$$\int \frac{dy}{3 - y} = \int x dx$$

مشتقة $3 - y$ هي (-1) نحتاج (-1)

$$-\int \frac{dy}{3 - y} = \int x dx$$

$$-\ln |3 - y| = \frac{x^2}{2} + c \quad x=1, y=2$$

$$-\ln (3 - 2) = \frac{(1)^2}{2} + c$$

$$-\ln (1) = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

يمكن التوقف هنا

$$\left[-\ln |3 - y| = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right] \times (-1)$$

$$\ln |3 - y| = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \quad (e)$$

$$3 - y = e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = 3 - e^{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}}$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الأنترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

المعادلة التفاضلية المتجانسة

سؤال

كيف يمكن تحديد المعادلة التفاضلية المتجانسة عن طريقة فصل المتغيرات؟

1 كل معادلة تفاضلية تحوي دالة مثلثية فيها الزاوية بشكل $\left(\frac{y}{x}\right)$ فهي معادلة تفاضلية متجانسة وإذا لم تكن الزاوية $\left(\frac{y}{x}\right)$ فيتم حلها بفصل المتغيرات (الطريقة السابقة).

2 كل معادلة تفاضلية تحوي دالة e والأس بشكل $\left(\frac{y}{x}\right)$ فهي معادلة تفاضلية متجانسة وإذا لم يكن الأس بشكل $\frac{y}{x}$ فيتم حلها بفصل المتغيرات (الطريقة السابقة).

3 إذا كانت أعلى أس لـ X يساوي أعلى أس لـ Y وكانت مجموع أسس حاصل ضرب $Y \cdot X$ يساوي أعلى أس لـ X و Y فهذه المعادلة متجانسة.

4 المعادلات التفاضلية التي شكلها $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}$ هذه معادلات تفاضلية متجانسة.

خطوات الحل

1 يجب جعل المعادلة بترتيب تكون فيه $\frac{dy}{dx}$ بالطرف الأيسر وباقي تفاصيل المعادلة بالطرف الأيمن (أحياناً يعطيها مرتبة).

2 نقسم كل حد من حدود الطرف الأيمن على أكبر أس لـ X (مرفوعة إلى أكبر أس).

3 الفرضية $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot v$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

4 نعوض هذه الفرضية بالمعادلة التفاضلية.

5 يتم استخدام خاصية قلب النسب لفصل المتغيرات والعودة للطريقة القديمة.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

سؤال 2 حل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

نقسم على التمراسل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \dots (1)$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$$

الفرضية

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

نعوض الفرضية

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v$$

توحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1 - 2v^2}{2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v}{v^2 - 1} dv$$

$$\ln|x| = \ln|v^2 - 1| + c$$

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{y^2}{x^2} - 1\right| + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

سؤال 1 حل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \dots (1)$$

الفرضية (ثابتة)

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

التعويض

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1 + v^2}{2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v} - v$$

توحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2 - 2v^2}{2v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{2v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2v}{1 - v^2} dv$$

خاصية قلب النسب والضرب بـ dv

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{-2v}{1 - v^2} dv$$

لوحة مشتقة
-2v

$$\ln|x| = -\ln|1 - v^2| + c$$

$$\ln|x| = -\ln\left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| + c$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{2}{v^2 - 2v + 1} dv$$

مربع كامل

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2}{(v-1)^2} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = 2 \int (v-1)^{-2} dv$$

$$\ln|x| = \frac{2(v-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-2}{v-1} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-2}{\frac{y}{x} - 1} + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 3

$$2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

$$\left[2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \right] \div 2x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = v.x$$

نعوض الفرضية

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1 + v^2}{2}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2} - \frac{v}{1} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2 - 2v}{2}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3}$$

قلبت النسبة والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+v^3}{-v^4} dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{-v^4} + \frac{v^3}{-v^4} \right) dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(-v^{-4} - \frac{1}{v} \right) dv$$

$$\ln|x| = \frac{-v^{-3}}{-3} - \ln|v| + c$$

$$\ln|x| = \frac{1}{3v^3} - \ln|v| + c$$

$$\ln|x| = \frac{x^3}{3y^3} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

مثال 4

$$x^2 \cdot y dx = (x^3 + y^3) dy$$

$$\frac{x^2 \cdot y dx}{(x^3 + y^3) dx} = \frac{(x^3 + y^3) dy}{(x^3 + y^3) dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot y}{x^3 + y^3}$$

نقسم على x^3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 \cdot y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3} \quad (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot v$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{v}{1+v^3}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - \frac{v}{1}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v - v(1+v^3)}{1+v^3}$$

قلبت النقطت والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{v}{1-2v^2} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{-1}{4} \int \frac{-4v}{1-2v^2} dv$$

مشتقة البقايا $(-4v)$

$$\ln|x| = \frac{-1}{4} \ln|1-2v^2| + c$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{4} \ln\left|1-2 \cdot \frac{y^2}{x^2}\right| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 5

$$(y^2 - x^2) dx + xy dy = 0$$

$$\frac{xy dy}{xy dx} = \frac{(x^2 - y^2) dx}{xy dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x \cdot y}$$

نقسم كل حد من حدود الكسرين المبين على x^2 مرفوعة أكثر من

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x \cdot y}{x^2}} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \quad (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot v$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

نعوض بمعادلة (1)

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1 - v^2}{v}$$

توحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v} - \frac{v}{1}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2 - v^2}{v}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int v^{-2} dv$$

$$\ln|x| = \frac{-v^{-1}}{-1} + c$$

$$\ln|x| = \frac{1}{v} + c$$

$$\ln|x| = \frac{1}{\frac{y}{x}} + c$$

$$\ln|x| = \frac{x}{y} + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 6

$$(y^2 - xy) dx + x^2 dy = 0$$

$$\frac{x^2 dy}{x^2 (dx)} = \frac{(xy - y^2) dx}{x^2 dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x.v$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + \cancel{x} = \cancel{x} - v^2$$

$$x \frac{dv}{dx} = -v^2$$

قلب النسبة والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{-1}{v^2} dv$$

قلبت النسب والضرب بـ dv

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-3v^2 - 4v - 1}{2 + 3v}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2 + 3v}{-3v^2 - 4v - 1} dv$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{3v + 2}{-(3v^2 + 4v + 1)} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{(2)(3v + 2)}{3v^2 + 4v + 1}$$

مشتقة البقايا
 $6v + 4 =$ نحتاج (2)

$$\ln|x| = -\frac{1}{2} \ln|3v^2 + 4v + 1| + c$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{3y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + 1\right| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 7

$$(x + 2y) dx + (2x + 3y) dy = 0$$

$$\frac{(2x + 3y) dy}{(2x + 3y) dx} = \frac{(-x - 2y) dx}{(2x + 3y) dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - 2y}{2x + 3y}$$

نقسم كل حد من حدود الطرف الأيسر على x مرفوعة لأكثر من

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{x}{x} - \frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{3y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}{2 + 3\left(\frac{y}{x}\right)} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v \quad (1) \text{ نعوض بمعادلة}$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v}{2 + 3v} - \frac{v}{1} \quad \text{توحيد مقامات}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{(-1 - 2v) - v(2 + 3v)}{2 + 3v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-1 - 2v - 2v - 3v^2}{2 + 3v}$$

حل المسألة والنكامل

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v-1}{-v^2+2v+1} dv$$

مشتقة البقايا $-2v+2$

نحتاج -2

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{-2} \int \frac{-2(v-1)}{-v^2+2v+1} dv$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{2} \ln|-v^2+2v+1| + c$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{2} \ln\left|\frac{-y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + 1\right| + c$$

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - 1} \quad (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{v+1}{v-1} \quad (1) \text{ نموذج معادلة}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{v-1} - \frac{v}{1}$$

لتوحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{(v+1) - v(v-1)}{v-1}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v+1-v^2+v}{v-1}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{-v^2+2v+1}{v-1}$$



حللت البصمة والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{3-v}{v^2-2v+1} dv$$

مشقة البصمة غير متوفرة ولا يمكن توفيرها بالبصمة.

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-(v-3)}{(v-1)^2} dv$$

عجلة صحت واصافة

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{(v-1)-2}{(v-1)^2} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \left[\frac{(v-1)}{(v-1)^2} - \frac{2}{(v-1)^2} \right] dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \left[\frac{1}{(v-1)} - 2(v-1)^{-2} \right] dv$$

$$\ln|x| = - \left[\ln|v-1| - \frac{2(v-1)^{-1}}{-1} \right] + c$$

$$\ln|x| = - \left[\ln|v-1| + \frac{2}{v-1} \right] + c$$

$$\ln|x| = - \ln \left| \frac{y}{x} - 1 \right| - \frac{2}{\frac{y}{x} - 1} + c$$

تحذير هام جدا

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مشبته لدى وزارة الصناعة، وعليه تحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الأستاذ والمطبعة وفق الاتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر المزمرة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 9

$$(3x-y) \bar{y} = x+y$$

نقسم على معامل \bar{y} وهو $(3x-y)$

$$\frac{(3x-y) \bar{y}}{(3x-y)} = \frac{x+y}{3x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$$

نقسم كل حد من حدود الطرف الأيمن على x مرفوعة أكثر من

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{3 - \frac{y}{x}} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

نعوض بمعادلة (1)

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{1+v}{3-v}$$

توحيد مقامات

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - \frac{v}{1}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{(1+v) - v(3-v)}{3-v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v}$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 11

$$\bar{y} = \frac{y}{x} + e^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{1}{x}} \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = v \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

$$x \frac{dv}{dx} + \cancel{x} = \cancel{x} + e^v$$

$$x \frac{dv}{dx} = e^v$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{e^v} dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int e^{-v} dv$$

مشتقة الاس

$$\ln|x| = -e^{-v} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{e^v} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{e^{\frac{1}{x}}} + c$$

حل المعادلة التفاضلية

سؤال 10

$$x \left(\frac{dy}{dx} - \tan \frac{y}{x} \right) = y$$

بالقسمة على x

$$\frac{dy}{dx} - \tan \frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \left(\frac{y}{x} \right) \dots (1)$$

الفرضية

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = v \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

نعوض بالمعادلة (1)

$$x \frac{dv}{dx} + \cancel{x} = \cancel{x} + \tan v$$

$$x \frac{dv}{dx} = \tan v$$

قلب النسب والضرب بـ dv

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{\tan v} dv \rightarrow \cot v$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos v}{\sin v} dv$$

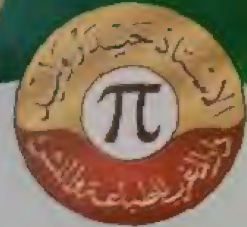
$$\ln|x| = \ln|\sin v| + c$$

$$\ln|x| = \ln \left| \sin \frac{y}{x} \right| + c$$

المعادلة التفاضلية متجانسة لأن زاوية tan بشكل $\frac{y}{x}$ كما ذكرناها في ملاحظات بداية الموضوع.

المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

Nots:



والله اعلم

الأستاذ حميد وليد



المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

2021



ملازمه دار النشر
07702729223

الأستاذ حميد وليد



المُسْنَدُ فِي الرِّيَاضِيَّاتِ

2021



ملازمه دار النشر
07702729223

المُسْنَدُ فِي الرَّيَاضِيَّاتِ

الجزء
الثاني

٢٠٢١



المعادلات
التفاضلية

5

التكامل

4

تطبيقات
التفاضل

3

عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب تأكد من وجود
الجلدة المدورة اللاصقة
في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة .



mlazmna



ملازم

الأستاذ حيدر وليد

07701780364

second
part

2021



السادس العلمي الأحيائي و التطبيقي



صفحة ملزم
دار النشر

نحذر من استنساخها ولا يجوز ذلك لكون فيها اشكال شرعي وقانوني
وغير ميراث الذمة والملازمة موثقة من دار الكتب والوثائق
علما ان ملازمنا حائزة على علامة تجارية من وزارة الصناعة
دائرة التطوير والتنظيم الصناعي

هام
للغاية

الكتاب لا يمكن فصله
عن صاحبه ولا
يكون له
قيد

ملاحظة :- من صفحة 139 الى صفحة 147 (خاص بالتطبيقي)

